SUCESIONES
Y SERIES

TOMO I

YU TAKEUCHI

Profesor titular de la Universidad Nacional de Colombia

EDITORIAL LIMUSA

MEXICO 1980

PROLOGO

Este libro no es un texto de estudio. Está dirigido a personas interesadas en aprender a manejar y dominar sucesiones y series.

Un buen conocimiento y manejo de las sucesiones y las series es indispensable para quien aspire a estudiar y profundizar en la rama del análisis matemático en general.

Sobre este tema hay poca teoría lo cual dificulta su práctica ya que en cada problema hay que utilizar métodos particulares. Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo se trata de presentar los conceptos básicos de sucesiones y series utilizando abundantes dibujos, ejemplos y ejercicios en el desarrollo de cada paso.

Los únicos conocimientos que se requieren para adentrarse en este estudio son los de cálculo I y II. Con estas bases se inicia y se pretende llegar a un nivel un poco superior al del primer grado en matemáticas de la Universidad Nacional.

Al final del segundo tomo se incluye un apéndice en donde el lector encontrará algunas aplicaciones de sucesiones de funciones. Se señala entre estas aplicaciones : El teorema de aproximación de Weierstrass y un teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Dada la importancia y utilidad del tema, y el vacío de obras didácticas que sobre él hay, se espera que este libro llegue a satisfacer la necesidad de muchos lectores.

Por último, quiero reconocer y agradecer al mismo tiempo la invaluable ayuda que me brindó el profesor Eduardo Mantilla leyendo y corrigiendo la totalidad de los manuscritos, realizando el fastidioso trabajo de la revisión de las pruebas de esta publicación.

YU TAKEUCHI

CONTENIDO

Tomo I

CONTENIDO

Tomo II

*** ***** ***

CAPITULO I

SUCESIONES

En los cursos elementales de cálculo se da siempre un concepto inicial de sucesión, en los parágrafos § 1, § 2, § 3 y § 4 de este capítulo lo repetiremos en forma breve como un repaso general.

§ 1. Sucesión

Un conjunto ordenado de números se llama *UNA SUCESION*. En la sucesión :

$$A = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{primer} \\ \textit{número}}}{a_1} , \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{segundo} \\ \textit{número}}}{a_2} , \dots , \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{n-ésimo} \\ \textit{número}}}{a_n} , \dots \} \tag{1}$$

el número a_n que ocupa el n- ésimo puesto se llama *el n-ésimo elemento* o *el n-ésimo término* de la sucesión . La sucesión se nota abreviadamente :

$$A = \{ a_n \} . \tag{2}$$

Así , una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto N de todos los números naturales : al número natural $n \in N$ le corresponde *el n-ésimo elemento* de la sucesión .

La sucesión (1) es *CRECIENTE* si

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \dots \tag{3}$$

y es *DECRECIENTE* si

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \dots \tag{4}$$

O sea que la sucesión $\{ a_n \}$ es creciente si

$$n > k \qquad \textit{implica} \qquad a_n \geqslant a_k \tag{3'}$$

y es decreciente si

$$n > k \qquad \textit{implica} \qquad a_n \leqslant a_k \tag{4'}$$

JEMPLO 1

$\{n^n\} = \{1, 4, 27, 256, \ldots \}$ *es creciente y*

$\{\frac{n+1}{n^2}\} \equiv \{2, 3/4, 4/9, 5/16, \ldots \}$ *es decreciente.*

* * * * * * * * * * * *

La sucesión $\{a_n\}$ es *ACOTADA SUPERIORMENTE* si existe una constan-
e M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \textit{para todo } n \tag{5}$$

es *ACOTADA INFERIORMENTE* si existe una constante M' tal que

$$M' \leqslant a_n \qquad \textit{para todo } n. \tag{6}$$

se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es *acotada* si es acotada superior e inferiormen-
e, es decir que si existe una constante M_o tal que

$$|a_n| \leqslant M_o \qquad \textit{para todo } n. \tag{7}$$

Dada la sucesión (1), se obtiene una *sub-sucesión* escogiendo elementos de (1) sin alterar su órden. Más precisamente, sean $n(1), n(2), \ldots, n(k), \ldots$ números naturales tales que #

$$n(1) < n(2) < n(3) < \ldots < n(k) < \ldots$$

entonces

$$B = \{a_{n(1)}, a_{n(2)}, \ldots, a_{n(k)}, \ldots \} \tag{8}$$

es una sub-sucesión de (1) (Fig. 1).

$$\begin{array}{llllll}
 & & \left\{\begin{matrix}n(1)\text{-ésimo}\\ \text{elemento}\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}n(2)\text{-ésimo}\\ \text{elemento}\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}n(k)\text{-ésimo}\\ \text{elemento}\end{matrix}\right\} & \\
A = \{ & a_1, \ldots, & a_{n(1)}, a_{n(1)+1}, \ldots, & a_{n(2)}, \ldots, & a_{n(k)}, \ldots & \} \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
B = \{ & & a_{n(1)}, & a_{n(2)}, \ldots, & a_{n(k)}, \ldots & \} \\
 & & \left(\begin{matrix}\text{primer}\\ \text{elemento}\end{matrix}\right) & \left(\begin{matrix}\text{segundo}\\ \text{elemento}\end{matrix}\right) & \left(\begin{matrix}k\text{-ésimo}\\ \text{elemento}\end{matrix}\right) &
\end{array}$$

Fig. 1 (B es una subsucesión de A)

****

\# También se puede decir de la siguiente manera:

Sea n una función estrictamente creciente de N en N:

$$n : k \longmapsto n(k),$$

entonces $B = \{a_{n(k)}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$.

EJEMPLO 2

$\{2n\} = \{2, 4, 6, \dots\}$ *es una subsucesión de* $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$\{1\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ *es una subsucesión de* $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

LIMITE DE UNA SUCESION

Si los términos de una sucesión $\{a_n\}$ se acercan a un número L, se dice que la sucesión tiende al límite L (o converge a L) y se nota :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \tag{9}$$

(ó $a_n \to L$ *cuando* $n \to \infty$).

Más precisamente la sucesión $\{a_n\}$ converge a L, si dado un número cualquiera ϵ (>0) existe un número natural N tal que

$$n \geqslant N \quad \textit{implica} \quad |a_n - L| < \epsilon . \tag{10}$$

Esto es , a partir de *N - ésimo* término todos los elementos están en una vecindad de L con radio ϵ *(Fig. 2)*.

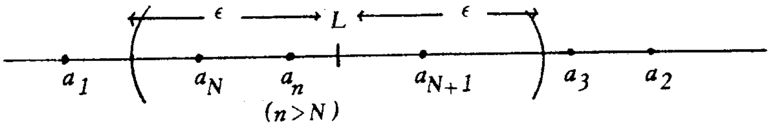


Fig. 2

Una sucesión que tiende a un límite se llama *SUCESION CONVERGENTE*, en caso contrario la sucesión es *DIVERGENTE*.

Si a_n puede aumentar tanto como se quiera cuando $n \to \infty$; o sea , dado cualquier número M existe N tal que

$$a_n > M \quad \textit{para todo} \quad n \geqslant N \tag{11}$$

(esto es , todos los elementos a partir de *N - ésimo* término son mayores que M)

entonces se dice que la sucesión $\{a_n\}$ diverge a más infinito , y se nota

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad (\text{ó} \quad a_n \to +\infty \ \textit{cuando}\ n \to +\infty). \tag{12}$$

De la misma manera , la sucesión $\{a_n\}$ diverge a menos infinito si , dado M'

existe N' tal que

$$a_n < M' \quad \text{para todo} \quad n \geq N'. \tag{13}$$

EJEMPLO 3.

(i) $\{a_n\} = \{0.3,\ 0.33,\ \ldots,\ 0.33\ldots3,\ \ldots\}$

esta sucesión es creciente y tiende a 1/3.

(ii) $\{b_n\} = \{3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots\}$,

esta sucesión es creciente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pi$.

(iii) $\{c_n\} = \{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \ldots\}$,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2}.$$

Más generalmente, si expresamos un número real en el sistema decimal, este número es límite de una sucesión cuyo n-ésimo término es el número quebrado finito de n decimales obtenido del número dado.

§ 2. Propiedad de la sucesión convergente.

PROPIEDAD 1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *si y sólo si* $\lim \lvert a_n - L \rvert = 0$.

Demostración inmediata por la definición.

PROPIEDAD 2. *Si una sucesión es convergente, su límite es único.*

Si una sucesión $\{a_n\}$ *tuviera dos límites diferentes, digamos* L_1, L_2 $(L_1 > L_2)$ *entonces para* $\epsilon = \{L_1 - L_2\}/2$ *extirían* N_1, N_2 *tal que*

$$a_n - L_1 < \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N_1,$$

$$a_k - L_2 < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq N_2.$$

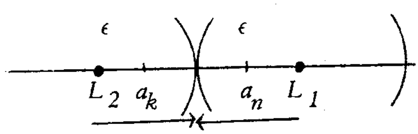


Fig. 3

Entonces, si $l > N_1$, $l > N_2$ *se tendría:*

$$a_l - L_1 < \epsilon, \quad a_l - L_2 < \epsilon$$

luego,

$$L_1 - L_2 = L_1 - a_l + a_l - L_2 < L_1 - a_l - a_l - L_2$$

$$< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = L_1 - L_2 \quad ,$$

o sea

$$L_1 - L_2 < L_1 - L_2 . \qquad (\text{absurdo !})$$

> **PROPIEDAD 3.**
>
> *i) Si una sucesión converge a L entonces cualquier subsucesión también converge a L.*
>
> *ii) Si una sucesión diverge a $+\infty$ (ó $-\infty$) entonces cualquier subsucesión diverge también a $+\infty$ (ó $-\infty$).*

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$| a_n - L | < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N .$$

Sea $\{ a_{n(k)} \}$ una subsucesión de $\{ a_n \}$, sea K tal que

$$n(K) \geq N ,$$

si $k \geq K$ entonces $n(k) \geq n(K) \geq N$, luego :

$$| a_{n(k)} - L | < \epsilon \qquad (\text{para todo } k \geq K),$$

esto es :

$$\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = L .$$

ii) Demostración idéntica al caso *i)* .

> **PROPIEDAD 4.**
>
> *Una sucesión convergente es acotada.*

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N .$$

Sea

$$M = \text{Maximo} \{ |a_1|, \ldots , |a_{N-1}|, |L + \epsilon|, |L - \epsilon| \}$$

entonces se tiene que

$$|a_n| \leq M \qquad \text{para todo } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

> **PROPIEDAD 5.**
>
> *Si una sucesión no es acotada superiormente (o inferiormente) entonces existe una subsucesión que diverge a $+\infty$ (ó $-\infty$).*

Sea $\{a_n\}$ una sucesión no acotada superiormente. Sea $a_{n(1)}$ el primer elemento mayor que 1 (nótese que siempre existe tal elemento .), $a_{n(2)}$ el primer elemento mayor que 2, diferente a $a_{n(1)}$. Evidentemente

$$n(2) > n(1) \qquad \text{ya que} \qquad a_{n(2)} > 2 > 1 .$$

En general, $a_{n(k)}$ es el primer elemento mayor que k, diferente a $a_{n(1)}$, $a_{n(2)}, \ldots, a_{n(k-1)}$ ya escogidos. Esta subsucesión $\{a_{n(k)}\}$ diverge a $+\infty$.

> **PROPIEDAD 6**
>
> Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ entonces
>
> i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$
>
> ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = L M$
>
> iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n / b_n\} = L/M$ (si $M \neq 0$)

Daremos la demostración de ii) y iii) .

ii) Como $\{b_n\}$ es acotada (prop. 4), sea

$$|b_n| \leqslant C \qquad (\text{ para todo } n) .$$

Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\left.\begin{array}{ll} |a_n - L| < \dfrac{\epsilon}{2C} & \text{para todo } n \geqslant N \\ |b_n - M| < \dfrac{\epsilon}{2|L|} & \text{para todo } n \geqslant N \end{array}\right\} , \qquad \begin{array}{l} \# \text{ NOTA 1} \\ \#\# \text{ NOTA 2} \end{array}$$

entonces para $n \geqslant N$ tenemos :

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM|$$

$$\leqslant |a_n b_n - L b_n| + |L b_n - LM| = |b_n|\,|a_n - L| + |L|\,|b_n - M|$$

$$< C \frac{\epsilon}{2C} + |L| \frac{\epsilon}{2|L|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon ,$$

esto es :

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = L M$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

\# NOTA 1 .

Hemos supuesto $L \neq 0$. En caso de que $L = 0$ la demostracuón es inmediata .

NOTA 2

Se puede escoger un N para ambas desigualdades:

Como $a_n \to L$, $b_n \to M$ $(n \to \infty)$ entonces,

dado ϵ_1 existe N_1 tal que $|a_n - L| < \epsilon_1$ para todo $n \geq N_1$, y

dado ϵ_2 existe N_2 tal que $|b_n - M| < \epsilon_2$ para todo $n \geq N_2$.

Sea $N = \text{Máximo}(N_1, N_2)$. Si $n \geq N$ entonces $n \geq N_1$, y, $n \geq N_2$,

luego:

$$|a_n - L| < \epsilon_1 , \quad |b_n - M| < \epsilon_2 \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

* * * * * * * * * * * * * * *

iii) Si $b_n \to M \neq 0$ $(n \to \infty)$, entonces existe N_0 tal que

$$|b_n - M| < \frac{|M|}{2} \qquad \text{para todo } n \geq N_0,$$

o sea

$$|b_n| \geq |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2} \qquad (\text{para todo } n \geq N_0).$$

Por lo tanto:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n|\,|M|} \leq \frac{2}{|M|^2} |b_n - M| .$$

De donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{M} .$$

De ii):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} = L \frac{1}{M} = \frac{L}{M} .$$

PROPIEDAD 7

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$n, k \geq N$ implica $|a_n - a_k| < \epsilon$.

Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|a_n - L| < (\epsilon/2) \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Si $k \geq N$ entonces

$$| a_k - L | < (\epsilon/2) \ ,$$

luego :

$$| a_n - a_k | \quad | a_n - L + L - a_k | \leqslant | a_n - L | + | L - a_k | < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ .$$

PROPIEDAD 8.

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dos sucesiones convergentes tales que*

$$a_n \leqslant b_n \qquad \text{para todo } n = 1, 2, 3, \ldots$$

entonces :

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Se demuestra fácilmente aplicando la definición de límite .

PROPIEDAD 9.

Sea $\{b_n\}$ *una sucesión que tiende a cero , si* $\{a_n\}$ *es una sucesión tal que*

$$| a_n - L | \leqslant | b_n | \qquad (\text{para todo } n)$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ .$$

Se demuestra fácilmente aplicando la definición de límite .

PROPIEDAD 10.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} | a_n | = | L |$.

Se demuestra utilizando la desigualdad :

$$| \, |a_n| - L | \leqslant | a_n - L | \ .$$

y la propiedad 9 .

PROPIEDAD 11.

Sean $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *tales que*

$$b_n \leqslant c_n \ , \ y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \ .$$

Si $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ *(para todo n) entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ .$$

$$| a_n - L | \leqslant | a_n - b_n | + | b_n - L | \leqslant | c_n - b_n | + | b_n - L |$$

$\leqslant | c_n - L | + | L - b_n | + | b_n - L | \to 0 \quad (n \to \infty).$

PROPIEDAD 12.

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión que converge a* L. *Si* $f(x)$ *es una función definida en una vecindad de* L, continua en L *entonces* $\{f(a_n)\}$ *tiende a* $f(L)$.

Por la continuidad de f, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* δ *tal que*

$$|x - L| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |f(x) - f(L)| < \epsilon \,. \tag{1}$$

Como $a_n \to L$ $(n \to \infty)$, *existe* N *tal que*

$$|a_n - L| < \delta \qquad \text{para todo} \quad n \geq N \,. \tag{2}$$

De (1) y (2) tenemos:

$$|f(a_n) - f(L)| < \epsilon \qquad \text{para todo} \quad n \geq N \,,$$

esto es:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L) \,.$$

PROPIEDAD 13.

i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (ó $-\infty$) *entonces* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$

ii) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *y* $a_n > 0$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$.

i) Dado $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$a_n > 1/\epsilon \qquad \text{para todo} \quad n \geq N \,,$$

o sea:

$$\frac{1}{a_n} < \epsilon \qquad \text{para todo} \quad n \geq N \,.$$

ii) Similar al caso i).

§ 3. Teorema de Weierstrass

PROPIEDAD 14.

Una sucesión creciente y acotada superiormente tiende a un límite; y una sucesión decreciente y acotada inferiormente tiende a un límite.

Esta propiedad se conoce con el nombre de *Teorema de Weierstrass*, y es una de las propiedades más importantes de los números reales. En base de *la expansión decimal infinita* de los números reales mostremos la propiedad 14 como sigue:

Sea $\{a_n\}$ *creciente y acotada* #, *entonces existe un número entero* m *tal que*

$$\begin{cases} a_n \leqslant m+1 & \text{para todo } n, \\ \text{algún } a_n \text{ es mayor que } m. & (\text{Fig. } 4) \end{cases}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

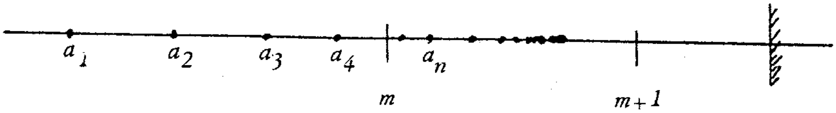


Fig. 4

Ahora subdividimos el intervalo $[m, m+1]$ *en diez partes iguales, los puntos de subdivisión son:*

$$\begin{array}{ccccccc} m.1, & m.2, & m.3, & \ldots\ldots, & m.8, & m.9 \\ \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel & \parallel \\ m+\frac{1}{10} & m+\frac{2}{10} & m+\frac{3}{10}, & & , m+\frac{8}{10} & m+\frac{9}{10} \end{array}$$

Entonces existe un k *tal que todos los elementos de la sucesión* $\{a_n\}$ *son menores o iguales a* $m.(k+1)$, *y algún elemento es mayor que* $m.k$ *(ver Fig. 5), sea* $p_1 = k$.

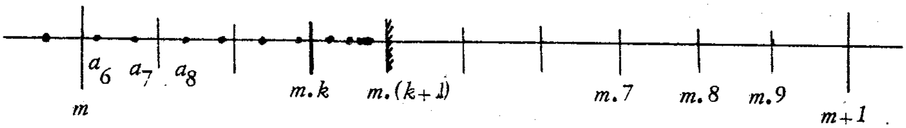


Fig. 5

Ahora subdividimos el intervalo $[m.k,\ m.(k+1)]$ *en 10 partes iguales, entonces para algún* h *tenemos:*

$$\begin{cases} a_n \leqslant m.k(h+1) = m + \dfrac{k}{10} + \dfrac{h+1}{100} & (\text{para todo } n) \\ \text{algún } a_n \text{ es mayor que } m.kh = m + \dfrac{k}{10} + \dfrac{h}{100} \end{cases}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

\# *Para mayor sencillez suponemos que* $a_n \geqslant 0$.

sea $p_2 = h$. *Así sucesivamente obtenemos un número decimal infinito :*

$$m.p_1p_2p_3\cdots\cdot = m + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \frac{p_3}{100} + \cdots$$

que es evidentemente el límite de la sucesión $\{a_n\}$.

EJEMPLO 4.

$$\{a_n\} = \{ \frac{1}{3}, \frac{11}{30}, \frac{111}{300}, \frac{1111}{3000}, \ldots \}$$

es una sucesión creciente y acotada superiormente. Todos los elementos de la sucesión son menores que uno, y hay elementos mayores que 0, *entonces* $m = 0$. *Ahora, todos los elementos son menores que* 0.4 *y hay elementos mayores que* 0.3, *entonces* $p_1 = 3$. *También, todos los elementos son menores que* $0.38 = 114/300$ *y el cuarto elemento es mayor que* $0.37 = 111/300$, *luego tenemos que* $p_2 = 7$. *Así sucesivamente tenemos :* $p_3 = 0$, $p_4 = 3, \ldots$, *entonces el límite es :*

$$m.p_1p_2\ldots = 0.3703\ldots \quad ■$$

Este método consiste en perseguir al límite encerrándolo en los intervalos de longitud $1, 0.1, 0.01, \ldots$ sucesivamente, en nuestro ejemplo :

$$[0, 1] \supset [0.3, 0.4] \supset [0.37, 0.38] \supset [0.370, 0.371] \supset \ldots \quad ■$$

EJEMPLO 5.

La sucesión $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ *es creciente y acotada, entonces existe el límite :*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

(Ver cualquier libro de cálculo.)

EJEMPLO 6.

Sea $\{a_n\} = \{n^{1/n}\}$. *Esta sucesión es decreciente a partir de* $n = 3$, *en realidad si* $n > 3$ *tenemos :*

$$\left\{\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{1/n}}\right\}^{n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n < \frac{1}{n} e < 1,$$

ya que $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ *es creciente y tiende a* e, *luego :*

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{1/n} \qquad \text{para todo} \quad n \geqslant 3 .$$

Además, todos los términos de la sucesión son mayores que 1, entonces el teorema de Weierstrass garantiza que la sucesión tiende a un límite. Si el límite de la sucesión es mayor que uno, digamos $1 + c$ $(c > 0)$ *entonces:*

$$1 + c \leqslant n^{1/n} \qquad \text{para todo } n ,$$

o

$$(1 + c)^n = 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2}c^2 \leqslant n \qquad (\text{para todo } n),$$

luego:

$$\frac{n(n-1)}{2}c^2 \leqslant n , \quad \text{ó} , \quad \frac{(n-1)c^2}{2} < 1 \qquad (\text{para todo } n),$$

esto es imposible ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)c^2}{2} = +\infty$. *Por lo tanto el límite debe ser uno:*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 .$$

§ 4. Límites fundamentales.

Aplicando la definición de límite tenemos:

(i) *Si* $\{c\} = \{c, c, \ldots, c, \ldots\}$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} c = c .$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty , \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Más generalmente tenemos:

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 0 \\ 1 & \text{si} \quad a = 0 \\ 0 & \text{si} \quad a < 1 . \end{cases}$$

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 1 \\ 1 & \text{si} \quad a = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |a| < 1 . \end{cases}$$

La sucesión $\{a^n\}$ *diverge si* $a < -1$.

Demostración.

Si $a > 1$ entonces $a = 1 + b$ donde $b > 0$.

Tenemos:

$$a^n = (1+b)^n \geqslant 1 + nb \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$$

Si $|a| < 1$ entonces $1/|a| > 1$, luego:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{|a|}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a|^n} = +\infty .$$

De la propiedad 12 tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$$

o sea que

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

Si $a < -1$, la subsucesión $\{ a^2, a^4, \ldots, a^{2n}, \ldots \}$ diverge a $+\infty$ ya que $a^2 > 1$, mientras que la subsucesión $\{ a, a^3, a^5, \ldots, a^{2n-1}, \ldots \}$ diverge a $-\infty$.

EJERCICIO 1 $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

Solución.

Si $a > 1$ sea $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$ entonces $x_n > 0$.

Tenemos:

$$1 + n x_n \leqslant (1 + x_n)^n = a ,$$

luego

$$0 < x_n \leqslant \frac{a-1}{n}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

o sea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Si $a < 1$ sea $a' = 1/a > 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} = 1 .$$

Si $a = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 .$$

EJERCICIO 2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1,\ k > 0)$$

Solución.

(A) *Si* $k = 1$ *sea* $a = 1 + b$ $(b > 0)$ *y tenemos :*

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+b)^n} < \frac{n}{1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} b^2} = \frac{2}{(n-1)\, b^2} \underset{(n\to\infty)}{\to} 0 .$$

(B) *Si* $k < 1$ *entonces*

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n}{a^n} \to 0 \quad (n\to\infty) .$$

(C) *Si* $k > 1$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(a^{1/k})^n} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad a^{1/k} > 1 .$$

Por lo tanto :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{(a^{1/k})^n}\right]^k = 0 .$$

EJERCICIO 3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

Solución.

Sea $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ *entonces* $x_n \geq 0$ *y tenemos :*

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} (x_n)^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} (x_n)^2 ,$$

luego

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

esto es :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + x_n) = 1 .$$

EJERCICIO 4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 , \quad a > 0 .$$

Solución.

Sea k un número natural tal que $k > 2a$, y sea $a^k/k! = c$. Si $n > k$ entonces tenemos:

$$0 \leqslant \frac{a^n}{n!} = c \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \dots \times \frac{a}{n} < \frac{c}{2^{n-k}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

●

EJERCICIO 5.

Demostrar que:

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^k}{n} = 0$ (k = constante)

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^k} = 0$ ($k > 0$).

Solución.

i)

$$0 \leqslant \frac{\log n}{n} = \frac{(\log n)}{e^{(\log n)}} \leqslant \frac{m}{e^m} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

donde m es la parte entera de $\log n$. Nótese que la función $f(x) = x/e^x$ es decreciente para todo $x \geqslant 1$ ya que

$$f'(x) = (1-x)/e^x \leqslant 0 .$$

Otra solución.

Sea $y_n = \frac{\log n}{n}$ entonces $\log n = n\, y_n$,

$$n = e^{n y_n} > 1 + n y_n + \frac{(n y_n)^2}{2} > \frac{(n y_n)^2}{2} ,$$

luego:

$$0 < y_n < \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0 \quad (n \to 0) .$$

ii), iii). Similar a i).

EJERCICIO 6.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}} \quad , \quad a_1 = 1 .$$

Demostrar que la sucesión es convergente.

Solución.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{1+\sqrt{a_n}} - \sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+\sqrt{a_n}})^2 - (\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}})^2}{\sqrt{1+\sqrt{a_n}}+\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{1+\sqrt{a_n}}+\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}} \, ,$$

Pero $a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > a_1 = 1$, *entonces por inducción se tiene que* $a_{n+1} > a_n$ *para todo* $n = 1, 2, \ldots$, *o sea que* $\{a_n\}$ *es* creciente.

Si suponemos que $a_n < 2$ *entonces*

$$a_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{a_n}} < \sqrt{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2.41\ldots} < 2 \, ,$$

pero como $a_1 < 2$ *entonces por inducción se tiene que* 2 *es una cota de la sucesión dada. El teorema de Weierstrass garantiza que el límite de* $\{a_n\}$ *existe.*

EJERCICIO 7.

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que*

$$a_{n+1} = \lambda\, a_n \qquad (\lambda = \textit{constante}),$$

investigar la convergencia o divergencia de $\{a_n\}$.

Solución.

En la condición $a_{n+1} = \lambda\, a_n$ *reemplazando* $n = 1, 2, \ldots$ *sucesivamente tenemos:*

$$a_2 = \lambda\, a_1$$
$$a_3 = \lambda\, a_2$$
$$a_4 = \lambda\, a_3$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_n = \lambda\, a_{n-1} \, .$$

Multiplicando miembro a miembro estas $n-1$ *igualdades se tiene:*

$$a_n = \lambda^{n-1}\, a_1 \, .$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\lambda| < 1 \, , \\ a_1 & \text{si} \quad \lambda = 1 \, , \\ +\infty & \text{si} \quad \lambda > 1 \, , \; a_1 > 0 \, , \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda > 1 \, , \; a_1 < 0 \, , \\ \text{diverge} & \text{si} \quad \lambda < -1 \, . \end{cases}$$

$$a_{n+1} = [a_1]^{\frac{1}{2^n}} [c]^{1-\frac{1}{2^n}} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

EJERCICIO 11.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4} a_{n-1}$$

demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Solución.

De la condición $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4} a_{n-1}$ *tenemos:*

$$a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{1}{2} a_{n-1} \right).$$

Sea $b_n = a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n$ *entonces*

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}$$

luego:

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} b_1 \qquad (\text{ver ejercicio } 7),$$

o sea

$$a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} b_1. \qquad (1)$$

De (1) se demuestra por inducción que

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + 2 b_1 n}{2^n} \qquad (2)$$

De (2) se tiene inmediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 \lim_{n\to\infty} (1/2^n) + 2 b_1 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

EJERCICIO 12.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que

$$a_{n+1} + b\, a_n + c\, a_{n-1} = 0 \qquad (b, c \text{ son constantes})$$

hallar

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Solución.

Sea $$a_{n+1} - \gamma a_n = \lambda (a_n - \gamma a_{n-1}) \qquad (1)$$

entonces

$$a_{n+1} - (\lambda + \gamma)\, a_n + \lambda \gamma\, a_{n-1} = 0 \,,$$

luego

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + \gamma = -b \\ \lambda \gamma = c \end{array}\right\} .$$

Entonces tenemos los valores de λ *y* γ *como sigue :*

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\ \lambda = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\ \lambda = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

[I] $b^2 - 4c \neq 0 \quad (\gamma \neq \lambda)$

De (1) tenemos (ver ejercicio 7) :

$$a_{n+1} - \gamma\, a_n = \lambda^{n-1} (a_2 - \gamma\, a_1). \qquad (3)$$

De (2) , se puede cambiar γ , λ *por* λ , γ *, por consiguiente obtenemos :*

$$a_{n+1} - \lambda\, a_n = \gamma^{n-1} (a_2 - \lambda\, a_1) . \qquad (4)$$

De (3) y (4) eliminando a_{n+1} *obtenemos el valor de* a_n *como sigue :*

1) $$a_n = \frac{\lambda^{n-1} - \gamma^{n-1}}{\lambda - \gamma}\, a_2 - \frac{\lambda^{n-2} - \gamma^{n-2}}{\lambda - \gamma}\, \lambda \gamma\, a_1 \,. \qquad (5)$$

2) *Entonces tenemos :*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |\lambda| < 1 ,\ |\gamma| < 1 \\ \dfrac{a_2 - \gamma\, a_1}{1 - \gamma} & \text{si } \lambda = 1 ,\ |\gamma| < 1 \\ \dfrac{a_2 - \lambda\, a_1}{1 - \lambda} & \text{si } |\lambda| < 1 ,\ \gamma = 1 ; \end{cases}$$

[II] $b^2 - 4c = 0 \quad (\gamma = \lambda)$.

$$a_{n+1} - \lambda\, a_n = \lambda (a_n - \lambda\, a_{n-1}) .$$

Utilizando el método empleado en el ejercicio 11 , se demuestra por inducción que :

(1) $$a_{n+1} = \lambda^n \left\{ a_1 + n \left(\frac{a_2}{\lambda} - a_1 \right) \right\} . \qquad (6)$$

De (6) tenemos :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\lambda| < 1 \\ \text{diverge} & \text{si} \quad |\lambda| \geqslant 1. \end{cases}$$

EJERCICIO 13.

Sea $\{c_n\}$ una sucesión que tiende a c, demostrar que :

$$\lim_{n\to\infty} \{1 + \frac{c_n}{n}\}^n = e^c$$

NOTA

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n \quad \text{es una función continua.}$$

<u>Solución</u>.

Por la continuidad de e^x, dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$|x - c| < \delta \quad \text{implica} \quad |e^x - e^c| < \epsilon/2 .$$

Sabemos que :

$$c_n \to c \quad (n \to \infty)$$

$$(1 + \frac{c - \delta}{n})^n \to e^{c-\delta} \quad (n \to \infty) .$$

Existe N tal que $n \geqslant N$ implica:

$$\left.\begin{aligned} &|c_n - c| < \delta \\ &|(1 + \frac{c-\delta}{n})^n - e^{c-\delta}| < \epsilon/2 . \end{aligned}\right\}$$

Entonces, para todo $n \geqslant N$ tenemos

$$e^{c-\delta} - \frac{\epsilon}{2} < (1 + \frac{c-\delta}{n})^n < (1 + \frac{c_n}{n})^n < (1 + \frac{c+\delta}{n})^n < e^{c+\delta}$$

o sea

$$e^c - \epsilon < (1 + \frac{c_n}{n})^n < e^c + \epsilon \quad (\text{para todo } n \geqslant N),$$

esto es ,

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{c_n}{n})^n = e^c . \blacksquare$$

§ 5 . Extremo superior , extremo inferior

Sea S un conjunto de números reales superiormente acotado . Pueden presentarse los dos casos siguientes :

(1) S tiene un número máximo , por ejemplo :

$S = \{ 1, 2, 5, 8 \}$, el número máximo es 8 ,

$S = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \}$, el número máximo es 1 .

(2) S no contiene el número máximo , por ejemplo :

S = el conjunto de todos los racionales estrictamente menores que 1 ,

$S = \{ x / x^2 < 2 \}$.

Nótese que cualquier conjunto finito* numérico tiene un número máximo ,por lo tanto todo conjunto finito es de primer caso .

En el segundo caso sean : a_1 cualquier elemento de S, b_1 una cota superior ** de S. Vamos a construir una sucesión creciente $\{ a_n \}$ de los elementos de S, y una sucesión decreciente $\{b_n\}$ de las cotas de S como sigue : Observemos el puntomedio de a_1 y b_1 , *(i)* si todos los elementos de S son menores que o igual a $(a_1 + b_1)/2$ entonces $(a_1 + b_1)/2$ es una cota de S y lo llamemos b_2 (*Fig.* 6 *(i)*) , y sea a_2 cualquier elemento de S mayor que a_1 (éste siempre existe ya que a_1 no es el número máximo de S.) .
(ii) Si algún número de S es mayor que $(a_1 + b_1)/2$ (Fig. 6 (ii)) sea a_1

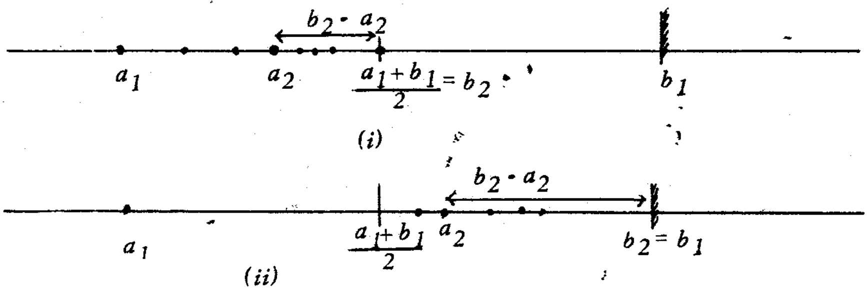


FIG. 6

****

* *Un conjunto que tiene un número finito de elementos distintos se llama* conjunto finito .

** *Un número* M *tal que* $x \leqslant M$ *para todo* $x \in S$ *se llama* una cota superior de S. *Existe una cota superior ya que* S *es acotado .*

este número de S , y $b_2 = b_1$. En ambos casos tenemos :

$$b_2 - a_2 \leqslant \frac{1}{2}(b_1 - a_1) .$$

Ahora consideremos el punto medio de a_2 y b_2 , *(i)* si $(a_2 + b_2)/2$ es una cota de S sea $b_3 = (a_2 + b_2)/2$ y a_3 = cualquier elemento de S mayor que a_2 (*Fig.* 7 *(i)*) . *(ii)* Si $(a_2 + b_2)/2$ no es una cota de S, sea a_3 un número de S mayor que $(a_2 + b_2)/2$, y $b_3 = b_2$ (*Fig.* 7 *(ii)*) .

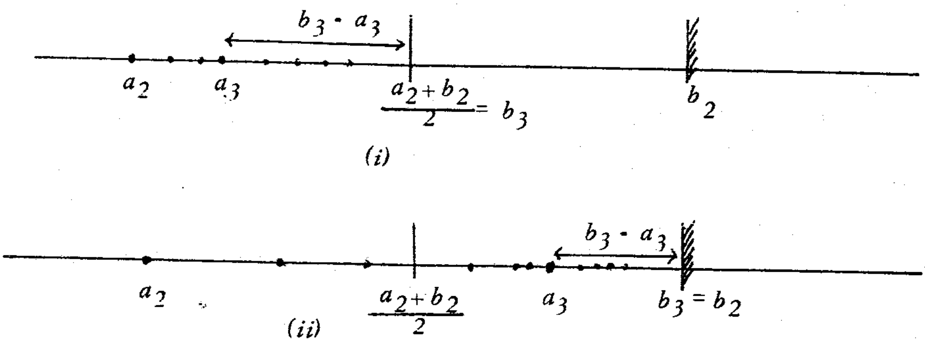


FIG. 7

En ambos casos tenemos :

$$b_3 - a_3 \leqslant \frac{1}{2}(b_2 - a_2) \leqslant \frac{1}{2^2}(b_1 - a_1) .$$

Así sucesivamente se puede determinar una sucesión creciente $\{a_n\}$ de los elementos de S, y una sucesión decreciente $\{b_n\}$ de las *COTAS* de S . Del teorema de Weierstrass (propiedad 14) existen los límites :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b .$$

Pero , por la construcción de las dos sucesiones tenemos :

$$0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) ,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 ,$$

o sea :

$$a = b .$$

Si x es cualquier número de S entonces:

$$x \leqslant b_n \quad (\textit{para todo } n)$$

luego

$$x \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = b ,$$

esto es , b es <u>una cota</u> de S .

Evidentemente b no pertenece a S puesto que S no tiene el número máximo . ■

En el primer caso, el número máximo del conjunto S se llama **el extremo superior de** S , y en el segundo caso se dice que b es el extremo superior de S si tiene la propiedad siguiente :

i) b es una cota de S ,

ii) existe una sucesión creciente de elementos de S que tiende a b .

El extremo superior de s se nota como :

$$\mathrm{Sup}\ S \qquad \text{ó} \qquad \mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in S}\ x \quad . ■$$

El extremo superior de S puede caracterizarse también de la siguiente manera :

Consideremos el conjunto S^* de todas las cotas de S , entonces $\mathrm{Sup}\, S$ es el número mínimo del conjunto S^* como se observa de la construcción del número b .

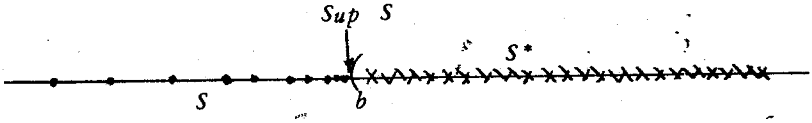


FIG. 8

EJEMPLO 7 .

(1) $A = \{-1 , -3 , 2, 1 , -10\}$, $\mathrm{Sup}\ A = 2$.

(2) $B = \{0 , -1, -2, -3, -4, \ldots , -n , \ldots\}$, $\mathrm{Sup}\, B = 0$.

(3) $C = \{\frac{n-1}{n}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ \ldots \}$, $\mathrm{Sup}\, C = 1$

ya que i) $\frac{n-1}{n} \leqslant 1$ *para todo* n ,

ii) *la sucesión* $\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \}$ *tiende a* 1.

(4) $D = \{ x / x = \text{racional}, \ x^2 < 2 \}$, $Sup \ D = \sqrt{2}$

ya que i) *si* $x^2 < 2$ *entonces* $x < \sqrt{2}$, *luego* $\sqrt{2}$ *es una cota de* D.

ii) *La sucesión* $\{ 1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots \}$ *tiende a* $\sqrt{2}$. ■

De manera análoga al extremo superior , si un conjunto S es inferiormente acotado definimos el **extremo inferior de** S (que se nota $Inf \ S$) como sigue :

Si S tiene el número mínimo éste es $Inf \ S$, si S no tiene el mínimo entonces $Inf \ S$ es el número tal que

i) $Inf \ S$ es una cota inferior de S,

ii) existe una sucesión decreciente de elementos de S que tiende a $Inf \ S$. ■

Utilizando el teorema de Weierstrass (propiedad 14) ya hemos demostrado el siguiente resultado que es una de las propiedades más importantes de los números reales :

> *PROPIEDAD 15*
>
> Dado cualquier conjunto de números superiormente (o inferiormente) acotado *EXISTE* el extremo superior (o inferior).

Si un conjunto S no es acotado superiormente entonces es conveniente definir como sigue :

$$Sup \ S = +\infty ,$$

y si S no es acotado inferiormente se acostumbra definir :

$$Inf \ S = -\infty .$$

Con este convenio , la propiedad 15 tomará la siguiente forma :

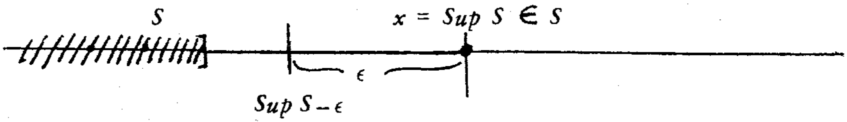
> *PROPIEDAD 15'*
>
> Para cualquier conjunto de números existen el extremo superior y el extremo inferior .

De la definición de extremo superior tenemos inmediatamente la siguiente propiedad .

> *PROPIEDAD 16.*
>
> Dado un conjunto de números , S , $Sup\ S$ es el número que satisface las dos condiciones siguientes :
>
> *i)* $x \leqslant Sup\ S$ *para todo* $x \in S$.
>
> *ii) Dado* $\epsilon > 0$ *existe un* $x \in S$ *tal que*
>
> $$Sup\ S - \epsilon < x .$$

La condición i) garantiza que $Sup\ S$ es una cota de S, mientras que la condición ii) implica que $Sup\ S$ es el máximo número de S *(si existe)*, ó $Sup\ S$ es el límite de una sucesión de los elementos de S.

Caso (1) $Sup\ S = x =$ *el máximo de* S



Caso (2) $Sup\ S \notin S$

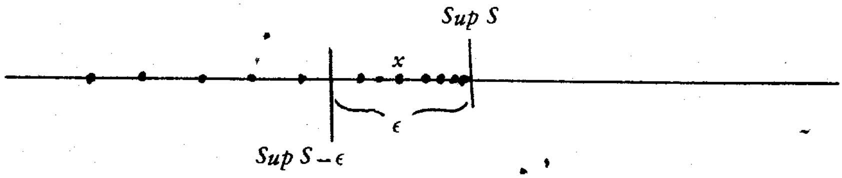


FIG. 9

De la misma forma , el extremo inferior de un conjunto puede ser caracterizado como sigue :

> *PROPIEDAD 16.*
>
> Dado un conjunto numérico S , $Inf\ S$ satisface las dos condiciones siguientes :
>
> *i)* $x \geqslant Inf\ S$ *para todo* $x \in S$.
>
> *ii) Dado* $\epsilon > 0$ *existe* $x \in S$ *tal que* $x < Inf\ S + \epsilon$.

$$c_2 = \begin{cases} 1/3 & si \quad c < 2/3 \\ 2/3 & si \quad c \geq 2/3 \end{cases}$$

$$c_3 = \begin{cases} 1/4 & si \quad c < 2/4 \\ 2/4 & si \quad 2/4 \leq c < 3/4 \\ 3/4 & si \quad 3/4 \leq c \end{cases},$$

en general

$$c_{n-1} = \begin{cases} 1/n & si \quad c < 2/n \\ 2/n & si \quad 2/n \leq c < 3/n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{n-1}{n} & si \quad \frac{n-1}{n} \leq c . \end{cases}$$

Así, $\{c_n\}$ *es una subsucesión de la sucesión dada y tiende a* c *.*

En el último ejemplo existe un número infinito (no contable !) de subsucesiones convergentes ! ∎

Entre varias subsucesiones convergentes de la sucesión acotada $\{a_n\}$ podemos encontrar una que converge al límite más grande como sigue :

Consideremos el conjunto S formado por los elementos de la sucesión $\{a_n\}$:

$$S = \{a_n\} .$$

Se presentan los dos casos siguientes :

(i) $Sup\ S$ es el límite de algunas subsucesión . En este caso ya tenemos una subsucesión convergente que tiende al límite más grande .

EJEMPLO (I). Sup S = 1 y 1 es el límite de una subsucesión $\{1\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$. *En este caso , Sup S pertenece a S .*

EJEMPLO (IV). Sup S = 1 y 1 es el límite de una subsucesión $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$, *nótese que Sup S no pertenece a S .*

(ii) $Sup\ S$ no es límite de las subsucesiones como el caso de los ejemplos *(II)* y *(III)*. (En *(II)*, $Sup\ S = 3/2$ y en *(III)* $Sup\ S = 6/5$). En este caso , $Sup\ S$ es igual a algún elemento de la sucesión $\{a_n\}$,digamos

$$Sup\ S = a_{n(1)} .$$

Ahora consideramos el conjunto $S - \{ a_{n(1)} \}$, si $Sup[S - \{ a_{n(1)} \}]$ es el límite de alguna subsucesión el problema ya está resuelto (caso (i)) , en caso contrario $Sup[S - \{ a_{n(1)} \}]$ es igual a algún elemento de $\{ a_n \}$, digamos :

$$Sup\ [S - \{ a_{n(1)} \}] = a_{n(2)} .$$

Es evidente que $a_{n(2)} < a_{n(1)}$.

Así sucesivamente encontramos una sucesión decreciente

$$\{ a_{n(1)} , a_{n(2)} , \ldots , a_{n(k)} , \ldots \},$$

el límite de ésta debe ser el más grande de los límites de todas las subsucesiones convergentes .

EJEMPLO (II) .

$$S = \{ (-1)^n + \frac{1}{n} , n = 1, 2, 3, \ldots \} .$$

$$a_{n(1)} = Sup\ S = 3/2 .$$

$$a_{n(2)} = Sup\ [S - \{ \tfrac{3}{2} \}] = \frac{5}{4} ,$$

$$a_{n(3)} = Sup[S - \{ \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4} \}] = \frac{7}{6}$$

$$a_{n(4)} = Sup[S - \{ \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{7}{6} \}] = \frac{9}{8}$$

etc.

Entonces

$$\frac{3}{2} > \frac{5}{4} > \frac{7}{6} > \frac{9}{8} > \ldots \longrightarrow 1.$$

Dada una sucesión $\{ a_n \}$ el máximo límite de todas sus subsucesiones se llama <u>límite superior</u> de la sucesión y se nota : $\overline{lim}\ a_n$.

En algunos libros se usa la notación para el límite supetior :

$$lim\ sup\ a_n ,$$

los lectores deben evitar la confusión entre $Sup\, a_n$ (que es el extremo superior del *CONJUNTO* $\{ a_n \}$) y $lim\ sup\ a_n$ (que es el límite superior de la

SUCESION $\{a_n\}$).

Si la sucesión $\{a_n\}$ no es acotada superiormente existe una subsucesión que diverge a $+\infty$ (propiedad 5), se define entonces

$$\overline{lim}\ a_n = +\infty .$$

Si la sucesión $\{a_n\}$ diverge a $-\infty$, no hay subsucesión convergente a un valor finito, entonces se define:

$$\overline{lim}\ a_n = -\infty . \bullet$$

De manera análoga daremos la siguiente definición:

> Dada una sucesión $\{a_n\}$, el mínimo límite de todas las subsucesiones se llama <u>límite inferior</u> de la sucesión y se nota:
>
> $$\underline{lim}\ a_n .$$

§ 7. Propiedad del límite superior y del límite inferior.

Dada una sucesión $\{a_n\}$, sea $\overline{lim}\ a_n = U \neq +\infty$.

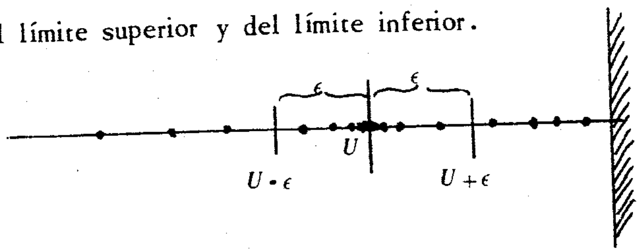


Fig. 10

Tomemos un $\epsilon > 0$ cualquiera, entonces existe à lo más un número finito de elementos de $\{a_n\}$ mayores que $U + \epsilon$, porque si existiera un número infinito de elementos de $\{a_n\}$ mayores que $U + \epsilon$, podríamos encontrar una subsucesión convergente a un límite mayor que o igual a $U + \epsilon$, esto contradice al hecho de que U es el máximo límite de todas las subsucesiones. También, como U es el límite de alguna subsucesión, digamos $\{a_{n(k)}\}$, existe K tal que

$$|a_{n(k)} - U| < \epsilon \qquad \textit{para todo} \quad k \geqslant K$$

o sea

$$U - \epsilon < a_{n(k)} \qquad \textit{para todo} \quad k \geqslant K .$$

De donde, existe un número infinito de elementos mayores que $U + \epsilon$. Estas dos propiedades caracterizan el límite superior de la sucesión como sigue:

PROPIEDAD 17

Sea $U = \overline{\lim}\ a_n$

entonces, dado $\epsilon > 0$ tenemos

i) existe <u>a lo más</u> un número finito de elementos de la sucesión $\{a_n\}$ *mayores que* $U + \epsilon$,

ii) existe un número infinito de elementos de $\{a_n\}$ *mayores que* $U - \epsilon$.

En vez de utilizar los términos '*un número finito de ....*', '*un número infinito de ....*' podemos expresar también como sigue :

PROPIEDAD 17'

Sea $U = \overline{\lim}\ a_n$,

dado $\epsilon > 0$ tenemos

i) Existe un número N *tal que*

$$a_n < U + \epsilon \qquad \text{para todo} \quad n \geq N .$$

ii) Para cualquier m *existe* $n > m$ *tal que*

$$U - \epsilon < a_n .$$

Nótese que la condición i) garantiza que no existe el límite de una subsucesión mayor que U y la condición ii) confirma que U es, en realidad, el límite de una subsucesión.

De la misma forma, el límite inferior de una sucesión es caracterizado por la siguiente propiedad :

PROPIEDAD 18.

Sea $L = \underline{\lim}\ a_n$,

dado $\epsilon > 0$ tenemos

i) existe, <u>a lo más</u>, un número finito de elementos de la sucesión $\{a_n\}$ *menores que* $L - \epsilon$,

ii) existe un número infinito de elementos de $\{a_n\}$ *menores que* $L + \epsilon$.

Esta caracterización es equivalente a :

PROPIEDAD 18'

Sea $L = \underline{\lim}\ a_n$,

dado $\epsilon > 0$ tenemos:

i) Existe un número N tal que

$$a_n > L - \epsilon \qquad \textit{para todo} \quad n \geq N .$$

ii) Para cualquier m existe n > m tal que

$$a_n < L + \epsilon .$$

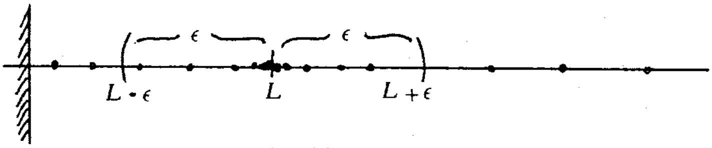


FIG. 11.

EJEMPLO 8.

$$\{a_n\} = \{ (-1)^n + \frac{1}{n} \} = \{ 0 , \frac{3}{2} , -\frac{2}{3} , \frac{5}{4} , -\frac{4}{5} , \ldots \}$$

FIG. 12

$$U = \overline{\lim}\ a_n = 1 .$$

Si $\epsilon = 0.1$ entonces solamente los 4 elementos $3/2$, $5/4$, $7/6$, $9/8$ son mayores que $1 + \epsilon = 1 + 0.1$, si $\epsilon = 0.01$ entonces solamente los 49 elementos : $3/2, 5/4, 7/6, \ldots, 97/96, 99/98$ son mayores que $L + 0.01$. Así se ve que existe un número finito de elementos mayores que $1 + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ dado. Obsérvese que hay un número infinito de elementos mayores que 1. ●

De las definiciones de límite superior y límite inferior, tenemos la siguiente propiedad :

PROPIEDAD 19

i) $\overline{\lim}\ a_n \geqslant \underline{\lim}\ a_n$

ii) $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = finito$ si y solo si $\{a_n\}$ es convergente, en este caso :

$$\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

<u>*Demostración*</u>.

i) Evidente.

ii) Si $\{a_n\}$ *es convergente, cualquier subsucesión converge a* $\lim_{n\to\infty} a_n$, *entonces* $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Si $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = L$, *entonces dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$a_n < L + \epsilon \quad (\text{para todo } n \geqslant N)$$

$$L - \epsilon < a_n \quad (\text{para todo } n \geqslant N),$$

o sea

$$|a_n - L| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geqslant N,$$

esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L .$$

PROPIEDAD 20 (Condición de Cauchy)

Una sucesión $\{a_n\}$ converge si y solo si, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|a_n - a_k| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \text{ y } k \geqslant N . \qquad (1)$$

La condición (1) se llama la condición de Cauchy, y sabemos que es necesaria para que la sucesión sea convergente (propiedad 7). Ahora suponemos la condición (1) y demostramos la convergencia de la sucesión. Primero, se tiene :

$$|a_n - a_N| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geqslant N ,$$

o sea

$$a_N - \epsilon < a_n < a_N + \epsilon \quad (\text{para todo } n \geqslant N).$$

Esto es, si $M = \text{Máximo}\ \{\ |a_1|, \dots, |a_N|, |a_N|+\epsilon\ \}$

entonces

$$|a_k| \leqslant M \qquad \text{para todo } k = 1, 2, 3, \dots ,$$

es decir que la sucesión $\{a_n\}$ *es acotada. Por lo tanto tenemos :*

$$U = \overline{\lim}\ a_n \neq +\infty , \quad L = \underline{\lim}\ a_n \neq -\infty .$$

Si $U \neq L$ *tomemos* $\epsilon = (U - L)/3$ *, de la propiedad del límite superior y del límite inferior existen* $n > N$, $k > N$ *tales que*

$$a_n > U - \epsilon , \quad L + \epsilon > a_k$$

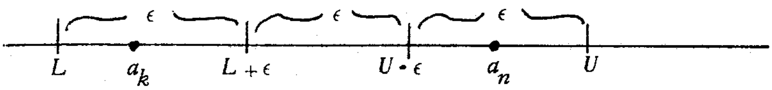


FIG. 13

o sea

$$a_n - a_k > (U - \epsilon) - (L + \epsilon) = U - L - 2\epsilon = \epsilon ,$$

esto contradice la condición (1), por lo tanto se tiene que $L = U$. *De la propiedad 19 la sucesión* $\{a_n\}$ *es convergente.* ∎

En los siguientes ejercicios 14 - 23 daremos algunas propiedades importantes del límite superior y del límite inferior.

> *EJERCICIO 14.*
>
> Dada una sucesión $\{a_n\}$, sea
>
> $$U = \operatorname*{Inf}_{n}\ [\ \operatorname*{Sup}_{k \geqslant n}\ a_k\ ] \qquad (1)$$
>
> entonces U satisface las dos condiciones siguientes :
>
> *i) Para cada* $\epsilon > 0$ *existe un número* N *tal que*
>
> $$a_n < U + \epsilon \qquad \text{para todo} \quad n \geqslant N .$$
>
> *ii) Para cada* $\epsilon > 0$*, cada* m *natural existe un número natural* $n > m$ *tal que*
>
> $$a_n > U - \epsilon .$$
>
> O sea que $\qquad U = \overline{\lim}\ a_n .$

NOTA En muchos libros se define el límite superior de $\{a_n\}$ con la relacion (1) .

<u>*Solución*</u> .

Sea $b_n = \text{Sup}\,\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \sup\limits_{k \geq n} a_k$,

evidentemente $\{b_n\}$ *es decreciente y*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n b_n = U .$$

Dado $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$n \geq N$ *implica* $b_n < U + \epsilon$.

Como $b_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k \geq a_n$

entonces se tiene :

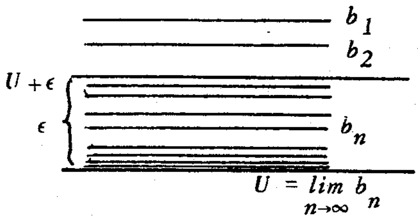


FIG. 14

$$a_n < U + \epsilon \qquad (\text{para todo } n \geq N).$$

También ,

$$U = \lim_{n\to\infty} b_n \leq b_m \qquad \text{para todo } m ,$$

o sea ,

$$U \leq \text{Sup}\,\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots\} .$$

Por lo tanto existe algún n ($n \geq m$) *tal que*

$$a_n > U - \epsilon \quad (\text{por la definición de Sup.}) .$$

EJERCICIO 15 .

Dada una sucesión $\{a_n\}$ demostrar que

$$\underline{\lim}\; a_n = \sup_n \{ \inf_{k\geq n} a_k \}$$

Demostración similar al ejercicio 14 .

EJERCICIO 16 .

Demostrar :

$$\underline{\lim}\; a_n = -\,\overline{\lim}\,(-a_n) , \quad \overline{\lim}\; a_n = -\,\underline{\lim}\,(-a_n) .$$

<u>*Sugerencia*</u> . *Utilizar la relación :*

$$\sup_k \{-a_k\} = -\inf_k \{a_k\}$$

EJERCICIO 17.

Demostrar que existe solamente un número U que satisface las dos condiciones enunciadas en el ejercicio 14.

Solución.

Si dos números U y V satisfacen las dos condiciones del ejercicio 14, entonces dado $\epsilon>0$ cualquiera para algún n suficientemente grande tenemos

$$\underbrace{V-\epsilon < a_n}_{(ii)\ para\ V} \underbrace{< U+\epsilon}_{(i)\ para\ U}$$

o sea

$$V \leqslant U,$$

puesto que ϵ es cualquiera.

De la misma manera:

$$U \leqslant V,$$

luego

$$U = V.$$

EJERCICIO 18.

Dadas dos sucesiones numéricas $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ demostrar:

A) i) Si $a_n \leqslant b_n$ entonces $\overline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n$, $\underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, b_n$.

ii) $\overline{\lim}\,(a_n+b_n) \leqslant \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$.

iii) $\overline{\lim}\, a_n b_n \leqslant \overline{\lim}\, a_n\, \overline{\lim}\, b_n \quad (a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0)$.

B) Enunciar y demostrar relaciones análogas a ii) y iii) para límites inferiores.

Solución.

A) i) $a_n \leqslant b_n$ *implica* $\sup\limits_{k\geqslant n} a_k \leqslant \sup\limits_{k\geqslant n} b_k$,

luego

$$\inf_n\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right) \leqslant \inf_n\left(\sup_{k\geqslant n} b_k\right).$$

ii) *Sean* $U = \overline{\lim}\, a_n$, $V = \overline{\lim}\, b_n$

entonces dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$a_n < U + \epsilon \;,\; b_n < V + \epsilon \qquad \textit{para todo } n \geq N,$$

luego

$$a_n + b_n < U + V + 2\epsilon$$

entonces

$$\overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leq U + V + 2\epsilon .$$

Como ϵ *es cualquiera se debe tener:*

$$\overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leq U + V = \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n .$$

iii) Demostración similar a ii).

Nótese que las condiciones $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ son indispensables para la desigualdad iii). Por ejemplo :

$$a_n = \{ 1, -2, 1, -2, \ldots \} , \quad \overline{\lim}\, a_n = 1 ,$$

$$b_n = \{ 1, -2, 1, -2, \ldots \} , \quad \overline{\lim}\, b_n = 1 ,$$

$$a_n \cdot b_n = \{ 1, 4, 1, 4, \ldots \} , \quad \overline{\lim}\,(a_n b_n) = 4 ,$$

$$\overline{\lim}\,(a_n b_n) > \overline{\lim}\, a_n \,\overline{\lim}\, b_n .$$

B)

$$\underline{\lim}\,(a_n + b_n) \geq \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n .$$

$$\underline{\lim}\,(a_n b_n) \geq \underline{\lim}\, a_n \,\underline{\lim}\, b_n \qquad (a_n \geq 0 ,\; b_n \geq 0).$$

EJERCICIO 19.

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que

$$a_n = b_n \qquad \textit{para todo } n > N \quad (\textit{para algún } N)$$

demostrar que

$$\overline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, b_n \;,\quad \underline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, b_n .$$

Nótese que los límites superior e inferior de una sucesión son independientes de un número finito de elementos de la sucesión .

Solución.

Sean $\quad c_n = \sup\limits_{k \geq n} a_k \;, \quad d_n = \sup\limits_{k \geq n} b_k$

la

es

entonces $c_n = d_n$ si $n > N$. Como $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ son decrecientes entonces

$$\operatorname*{Inf}_n c_n \leq c_n = d_n \quad \text{para todo } n > N,$$

luego

$$\operatorname*{Inf}_n c_n \leq \operatorname*{Inf}_n d_n .$$

De la misma forma tenemos:

$$\operatorname*{Inf}_n d_n \leq \operatorname*{Inf}_n c_n ,$$

por lo tanto:

$$\overline{\lim}\ a_n = \operatorname{Inf} c_n = \operatorname{Inf} d_n = \overline{\lim}\ b_n .$$

EJERCICIO 20.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos no negativos, demostrar que:

i) $\overline{\lim}\ \{a_n\}^k = \{\overline{\lim}\ a_n\}^k$ ($k > 0$, k es una constante.)

ii) $\underline{\lim}\ \{a_n\}^k = \{\underline{\lim}\ a_n\}^k$ ($k > 0$, k es una constante.)

Solución.

i) Si $\overline{\lim}\ a_n = +\infty$ entonces $\{a_n\}$ no es acotada superiormente, luego $\{a_n^k\}$ no es acotada superiormente, por lo tanto

$$\overline{\lim}\ [a_n]^k = +\infty$$

y tenemos la igualdad i) en el sentido de $+\infty = +\infty$. Por lo tanto suponemos que $\overline{\lim}\ a_n = L \neq +\infty$. Dado ϵ ($1 > \epsilon > 0$) existe N tal que

$$a_n < L + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N,$$

entonces

$$(a_n)^k < (L+\epsilon)^k \leq L^k + k(L+1)^{k-1}\epsilon. \quad \text{\# \underline{Nota}} \qquad (1)$$

Por otra parte, existe una subsucesión $\{a_{s(n)}\}$ tal que

$$L - \epsilon < a_{s(n)} \quad (\text{para } n \text{ suficientemente grande}),$$

entonces

$$[a_{s(n)}]^k > (L-\epsilon)^k \geq L^k - kL^{k-1}\epsilon. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se ve que

$$\overline{\lim}\ (a_n)^k = L^k .$$

* * * * * * * * * * * * * * * * *

Nota # Sea $f(x) = L^k + k(L+1)^{k-1}x - (L+x)^k$

entonces

$$f(0) = 0\ ,\ f'(x) = k(L+1)^{k-1} - k(L+x)^{k-1} \geq 0 \quad si \quad x < 1,$$

por lo tanto se tiene :

$$f(x) \geqslant 0 \qquad si \qquad x < 1\ ,$$

o sea :

$$L^k + k(L+1)^{k-1}\epsilon \geqslant (L+\epsilon)^k .$$

EJERCICIO 21.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos no negativos, si $\overline{\lim}\ a_n = L \neq 0$, $L \neq +\infty$, demostrar que :

$$\overline{\lim}\ [a_n]^{1/n} = 1 .$$

Solución.

Dado $\epsilon > 0$ *nota existe N tal que

$$a_n < L + \epsilon \quad para\ todo \quad n \geqslant N\ ,$$

luego

$$(a_n)^{1/n} < (L+\epsilon)^{1/n} .$$

Entonces

$$\overline{\lim}\ (a_n)^{1/n} \leqslant \overline{\lim}\ (L+\epsilon)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (L+\epsilon)^{1/n} = 1. \qquad (1)$$

Por otra parte, existe una subsucesión $\{a_{s(n)}\}$ tal que

$$L - \epsilon < a_{s(n)} \qquad (\text{si } n \text{ es suficientemente grande}),$$

luego

$$[a_{s(n)}]^{1/n} > (L-\epsilon)^{1/n} .$$

Entonces

$$\overline{\lim}\ [a_n]^{1/n} \geqslant \overline{\lim}\ [a_{s(n)}]^{1/n} \geq \overline{\lim}\ (L-\epsilon)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (L-\epsilon)^{1/n} = 1 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene :

$$\overline{\lim}\ (a_n)^{1/n} = 1.$$

NOTA * Escoger ϵ menor que L. ●

EJERCICIO 22.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos, demostrar :

$$\underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Solución.

Sea $U = \overline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < U + \epsilon \qquad \text{para todo} \quad k \geqslant N,$$

o sea:

$$a_{k+1} < (U+\epsilon)\, a_k \qquad \text{para todo} \quad k \geqslant N.$$

En la desigualdad anterior reemplazando $k = N, N+1, \ldots, (n-1)$ sucesivamente tenemos :

$$a_{N+1} < (U+\epsilon)\, a_N$$

$$a_{N+2} < (U+\epsilon)\, a_{N+1}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$a_n < (U+\epsilon)\, a_{n-1},$$

luego tenemos :

$$a_n < (U+\epsilon)^{n-N}\, a_N.$$

Sacando n-ésima raíz de la desigualdad anterior tenemos :

$$\sqrt[n]{a_n} < (U+\epsilon)^{1-\frac{N}{n}} \sqrt[n]{a_N}.$$

por lo tanto :

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}\ (U+\epsilon)^{1-\frac{N}{n}} \sqrt[n]{a_N}$$

$$\leqslant \overline{\lim}\ (U+\epsilon)^{1-\frac{N}{n}}\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_N}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (U+\epsilon)^{1-\frac{N}{n}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_N} = (U+\epsilon)$$

Como ϵ es cualquiera se tiene que

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leqslant U = \overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\ .$$

De la misma manera se tiene

$$\underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n}\ .$$

EJERCICIO 23.

Dada una sucesión $\{a_n\}$, sea

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

demostrar

$$\underline{\lim}\ a_n \leqslant \underline{\lim}\ \sigma_n \leqslant \overline{\lim}\ \sigma_n \leqslant \overline{\lim}\ a_n .$$

Solución.

Sea $U = \overline{\lim}\ a_n$ *, dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$a_k < U + \epsilon \quad \text{para todo} \quad k \geqslant N .$$

Si $n > N$ *tenemos:*

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + \cdots + a_n}{n}$$

$$< \frac{a_1 + \cdots + a_N}{n} + \frac{(n - N)(U + \epsilon)}{n}$$

Pero como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_N}{n} = 0\ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n - N)(U + \epsilon)}{n} = U + \epsilon$$

entonces

$$\overline{\lim}\ \sigma_n \leqslant \overline{\lim}\ \left[\frac{a_1 + \cdots + a_N}{n}\right] + \overline{\lim}\ \frac{(n - N)(U + \epsilon)}{n} = U + \epsilon .$$

Como ϵ *es cualquiera se tiene que*

$$\overline{\lim}\ \sigma_n \leqslant U = \overline{\lim}\ a_n .$$

De manera similar se demuestra la desigualdad

$$\underline{\lim}\ a_n \leqslant \underline{\lim}\ \sigma_n\ .$$

EJERCICIO 24. ⊕

Sean
$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B .$$

demostrar :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [A_n B_1 + A_{n-1} B_2 + \ldots + A_1 B_n] = AB .$$

Demostración.

Las sucesiones $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ son acotadas, sean a, b (>0) tales que

$$|A_n| \leqslant a, \quad |B_n| \leqslant b .$$

Dado $\epsilon > 0$ existe N_o tal que para todo $n \geqslant N_o$ tenemos :

$$|A_n - A| < \frac{\epsilon}{3(a+b)}, \quad |B_n - B| < \frac{\epsilon}{3(a+b)} .$$

También, existe N tal que

$$\frac{2 N_o ab}{N + 2N_o} < \epsilon/3 .$$

Si $i, j \geqslant N_o$ tenemos

$$|A_i B_j - AB| \leqslant |A_i B_j - A_i B| + |A_i B - AB|$$

$$\leqslant a \frac{\epsilon}{3(a+b)} + b \frac{\epsilon}{3(a+b)} = \epsilon/3 .$$

Si $n \geqslant N + 2N_o$ tenemos

$$\left| \sum_{j=N_o+1}^{n-N_o} A_{n-j+1} B_j - (n - 2N_o) AB \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=N_o+1}^{n-N_o} | A_{n-j+1} B_j - AB | \leqslant \frac{\epsilon}{3} (n - 2N_o).$$

Luego :

$$\left| \sum_{j=1}^{n} A_{n-j+1} B_j - (n - 2N_o) AB \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N_o} |A_{n-j+1} B_j| + \left| \sum_{j=N_o+1}^{n-N_o} A_{n-j+1} B_j - (n - 2N_o) AB \right|$$

$$+ \sum_{j=n-N_o+1}^{n} |A_{n-j+1} B_j|$$

$$\leqslant 2N_o\, ab + \frac{\epsilon}{3}\,(n - 2N_o)\ ,$$

entonces :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} A_{n-j+1} B_j - \frac{n-2N_o}{n} AB \right| \leqslant \frac{2N_o\, ab}{n} + \frac{n-2N_o}{n} \frac{\epsilon}{3}$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2}{3}\epsilon\ .$$

Pero como $\left| \frac{2N_o}{n} AB \right| \leqslant \frac{2N_o\, ab}{n} < \epsilon/3$, *entonces tenemos :*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} A_{n-j+1} B_j - AB \right| < \frac{2}{3}\epsilon + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\ . \ \blacksquare$$

EJERCICIO 25.

Hallar $\overline{\lim}\, a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$, $Sup\{a_n\}$, $Inf\{a_n\}$.

i) $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n}$ ii) $a_{2n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, $a_{2n-1} = (-1)^n/n$

iii) $a_n = (-1)^n$ si n es par , $a_n = \sqrt{n}$ si n es impar.

iv) $a_n = (-1)^n \{ 1 + \frac{2}{n} \}$ v) $a_n = (-1)^n n$

vi) $a_n = \begin{cases} -\sqrt{n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \sqrt{n} - \sqrt{n-1} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$ vii) $a_n = n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}$

viii) $a_n = \cos \frac{n\pi}{3}$ ix) $a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n}$

x) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \right)$ xi) $a_n = \cos\left[\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{n} \right]$

xii) $a_n = [1+n]^{1/n}$ xiii) $a_n = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$

{[ ] = la parte entera de ... }

xiv)

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

xv) $a_n = \tan\left[\frac{n\pi}{3} \cdot \frac{1}{3n}\right]$

Respuesta

i) $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = -1$, $Sup\{a_n\} = 3/2$, $Inf\{a_n\} = -1$.

ii) $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = 0$, $Sup\{a_n\} = 3/2$, $Inf\{a_n\} = -1$.

iii) $\overline{\lim}\ a_n = +\infty$, $\underline{\lim}\ a_n = 1$, $Sup\{a_n\} = +\infty$ $Inf\{a_n\} = 1$.

iv) $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = -1$, $Sup\{a_n\} = 2$, $Inf\{a_n\} = -3$.

v) $\overline{\lim}\ a_n = +\infty$, $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$, $Sup\{a_n\} = +\infty$, $Inf\{a_n\} = -\infty$

vi) $\overline{\lim}\ a_n = 0$, $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$, $Sup\{a_n\} = 1$, $Inf\{a_n\} = -\infty$.

vii) $\overline{\lim}\ a_n = +\infty$, $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$, $Sup\{a_n\} = +\infty$, $Inf\{a_n\} = -\infty$

viii) $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = -1$, $Sup\{a_n\} = 1$, $Inf\{a_n\} = -1$.

ix) $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = -1$, $Sup\{a_n\} = 1$, $Inf\{a_n\} = -1$.

x) $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = -1$, $Sup\{a_n\} = 1$, $Inf\{a_n\} = -1$.

xi) $\overline{\lim}\ a_n = 1$, $\underline{\lim}\ a_n = -1$, $Sup\{a_n\} = 1$, $Inf\{a_n\} = -1$.

xii) $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = 1$, $Sup\{a_n\} = 2$, $Inf\{a_n\} = 1$.

xiii) $\overline{\lim}\ a_n = 2/3$, $\underline{\lim}\ a_n = 0$, $Sup\{a_n\} = 2/3$, $Inf\{a_n\} = 0$.

xiv) $\overline{\lim}\ a_n = 2$, $\underline{\lim}\ a_n = -2$, $Sup\{a_n\} = 2$, $Inf\{a_n\} = -7/3$

xv) $\overline{\lim}\ a_n = \sqrt{3}$, $\underline{\lim}\ a_n = -\sqrt{3}$, $Sup\{a_n\} = \sqrt{3}$, $Inf\{a_n\} = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{6}\right)$

§ 8. EJERCICIOS ADICIONALES (Sucesiones)

EJERCICIO 26

Hallar $\overline{\lim}\ a_n$, $\underline{\lim}\ a_n$ *si*

$$a_1 = 0 , \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2} , \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}$$

Sugerencia

Por inducción demostrar que :

$$a_{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \qquad + \frac{1}{2^n} \qquad (n \geqslant 2)$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} \qquad (n \geqslant 1) ,$$

luego

$$\overline{\lim}\ a_n = 1 , \quad \underline{\lim}\ a_n = 1/2 .$$

EJERCICIO 27 .

i) Dado c , $-1 < c < 1$ *demostrar que existe una subsucesión de la sucesión* $\{ \operatorname{sen} \log n \}$ *que converge a* c .

ii) Demostrar :

$$\overline{\lim}\ (\operatorname{sen} \log n) = 1 , \quad \underline{\lim}\ (\operatorname{sen} \log n) = -1 .$$

Solución .

Sea $b = \operatorname{sen}^{-1} c$, *si* $n(k)$ *es la parte entera de* $e^{2k\pi+b}$ *entonces*

$$n(k) \leqslant e^{2k\pi+b} < n(k) + 1 .$$

Por lo tanto tenemos

$$| \log \{ e^{2k\pi+b} \} \quad \log n(k) |$$

$$\leqslant \log \{ n(k) + 1 \} - \log n(k) = \log \frac{n(k)+1}{n(k)} .$$

Como $\log \dfrac{n(k)+1}{n(k)} \to 0$ $(k \to \infty)$ *entonces*

$$| (2k\pi + b) - \log n(k) | \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty) ,$$

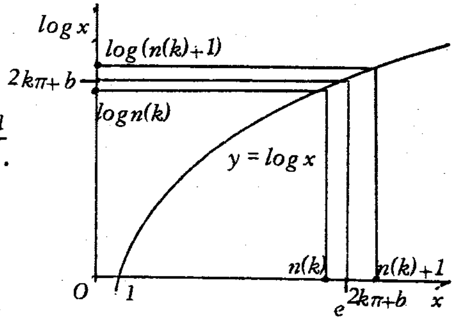


FIG. 15

por lo tanto

$$\operatorname{sen} (2k\pi + b) - \operatorname{sen} \{ \log n(k) \} \to 0 \quad (k \to \infty) ,$$

o sea

$$\operatorname{sen} \log n(k) \to \operatorname{sen} b \quad (k \to \infty) .$$

ii) Tomando $c = 1$, ó $c = -1$ tenemos

$$\overline{\lim}\,(\operatorname{sen}\log n) = 1 \quad , \quad \underline{\lim}\,(\operatorname{sen}\log n) = -1 .$$

EJERCICIO 28.

Sean $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ dos sucesiones convergentes tales que

$$a_n = c_n\, a_{n-1} ,$$

demostrar que

$$\left|\lim_{n\to\infty} c_n\right| \leqslant 1.$$

Solución.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, por lo tanto se tiene la relación deseada.

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = c > 1$, entonces dado δ $(1 < 1+\delta < c)$ existe N tal que

$$n > N \qquad \text{implica} \qquad |c_n| > 1+\delta ,$$

o sea

$$|a_n| > (1+\delta)\,|a_{n-1}| .$$

Entonces

$$|a_{N+p}| > (1+\delta)^p\,|a_N| ,$$

esto es

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{p\to\infty} |a_{N+p}| = +\infty \quad (\text{imposible !}).$$

Por lo tanto se tiene que

$$c = \lim_{n\to\infty} |c_n| \leqslant 1 .$$

EJERCICIO 29 $^{\oplus}$

Demostrar que:

i) Dado a existen dos sucesiones de números naturales, $\{n_k\}$, $\{p_k\}$ y una sucesión $\{\epsilon_k\}$ tales que

$$n_k = a\,p_k + \epsilon_k \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0 .$$

ii) Dados a y b con a irracional existen dos sucesiones de números

naturales $\{n_k\}$, $\{p_k\}$ *y una sucesión* $\{\epsilon_k\}$ *tales que*

$$n_k = a\,p_k + \epsilon_k + b\,, \quad \lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0\,.$$

iii) $\overline{\lim}\,(\operatorname{sen} n) = 1$, $\overline{\lim}\,(\cos n) = 1$, $\underline{\lim}\,(\operatorname{sen} n) = -1$,

$$\underline{\lim}\,(\cos n) = -1\,.$$

NOTA Más generalmente, los conjuntos $\{\operatorname{sen} n \,/\, n = 1, 2, 3, \ldots\}$, $\{\cos n \;\; n = 1, 2, 3, \ldots\}$ son densos en $[-1, 1]$.

<u>*Solución*</u>.

(i) Demostración por inducción.

Sea

$$n_k = p_k\,a + \epsilon_k \qquad (n_k,\ p_k \text{ son naturales})\,. \tag{1}$$

Dividiendo a *por* ϵ_k *se tiene :*

$$a = \epsilon_k\,m_k + \epsilon^*_{k+1}$$

donde m_k *es natural y*

$$|\epsilon^*_{k+1} / \epsilon_k| \leqslant 1/2\,.$$

Multiplicando (1) *por* m_k :

$$n_k\,m_k = p_k\,m_k\,a + \epsilon_k\,m_k$$

$$= p_k\,m_k\,a + (a - \epsilon^*_{k+1})$$

$$= (p_k\,m_k \pm 1)\,a \mp \epsilon^*_{k+1}\,.$$

Sean

$$n_{k+1} = n_k\,m_k\,, \quad p_{k+1} = p_k\,m_k \pm 1\,, \quad \epsilon_{k+1} = \mp\,\epsilon^*_{k+1}$$

entonces

$$n_{k+1} = p_{k+1}\,a + \epsilon_{k+1} \qquad \text{donde} \quad |\epsilon_{k+1}/\epsilon_k| < 1/2\,.$$

<u>Observación</u>

Si $\epsilon_k = 0$ *para algún* k *entonces* $n_k = p_k\,a$, *o sea* $a = n_k/p_k$ *(racional). Por lo tanto, si* a *es irracional entonces las dos sucesiones* $\{n_k\}$, $\{p_k\}$ *son infinitas.*

ii) Sean $\{n_k\}$, $\{p_k\}$ $\{\epsilon_k\}$ *las sucesiones construidas en (i). Sea*

$$q_k = [b/\epsilon_k] \qquad ([\;\;] = \text{la parte entera de} \ldots)$$

entonces :

$$b = \epsilon_k \, q_k + \lambda_k \qquad \text{donde} \quad |\lambda_k| < |\epsilon_k|$$

Por consiguiente :

$$n_k \, q_k = p_k \, q_k \, a + \epsilon_k \, q_k = p_k \, q_k \, a + b - \lambda_k$$

donde $n_k q_k$, $p_k q_k$ son naturales y $\lambda_k \to 0 \; (k \to \infty)$.

(iii) Sean $a = 2\pi$, $b = \operatorname{sen}^{-1} y \; (-1 \leqslant y \leqslant 1)$ entonces

$$\operatorname{sen}(n_k q_k) = \operatorname{sen}\{2\pi p_k q_k + \operatorname{sen}^{-1} y - \lambda_k\}$$

$$\longrightarrow \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} y) = y \qquad (k \to \infty).$$

EJERCICIO 30 $\oplus$

Demostrar que existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \cos (x_n)^2 = 1 \; , \quad \lim_{n\to\infty} \cos (x_n + 1)^2 = -1$$

Solución .

Del ejercicio 29 , dado $\Delta > 0$ existen los números naturales n , p tales que

$$n = p\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\} + \left\{\frac{\pi - 1}{2\sqrt{2\pi}}\right\} + \epsilon' \qquad \text{donde} \quad |\epsilon'| < \Delta ,$$

luego :

$$2(\sqrt{2\pi}\, n) = 2\pi p + (\pi - 1) + 2\sqrt{2\pi}\,\epsilon' .$$

Por lo tanto :

$$\{\sqrt{2\pi}\, n + 1\}^2 = 2\pi n^2 + 2\sqrt{2\pi}\, n + 1$$

$$= 2\pi n^2 + 2\pi p + \pi + 2\sqrt{2\pi}\,\epsilon'$$

$$= 2\pi (n^2 + p) + \pi + 2\sqrt{2\pi}\,\epsilon'$$

de donde tenemos

$$\cos\{\sqrt{2\pi}\, n + 1\}^2 = -\cos(2\sqrt{2\pi}\,\epsilon') \longrightarrow -1 \qquad (\Delta \to 0).$$

También :

$$\cos(\sqrt{2\pi}\, n)^2 = 1 .$$

EJERCICIO 31.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $\{x_n - x_{n-1}\}$ es convergente, demostrar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \{x_n - x_{n-1}\}.$$

Sugerencia

Aplicar el ejercicio 23 :

$$\sigma_n = \frac{x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})}{n} = \frac{x_n}{n}.$$

Dejamos la demostración directa al lector.

Ejemplo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to\infty} \{\log n - \log(n-1)\} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{n}{n-1} = 0.$$

EJERCICIO 32.

Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ dos sucesiones convergentes, demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n] = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Sugerencia.

Aplicar el ejercicio 23 a la sucesión $\{x_n y_n\}$.

EJERCICIO 33.

Sean $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ dos sucesiones tales que

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, $\{y_n\}$ es estrictamente decreciente *,

Si $\{(x_n - x_{n+1}) / (y_n - y_{n+1})\}$ converge, demostrar que.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}.$$

Solución.

Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$k \geq N \quad \text{implica} \quad \left| \frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}} - l \right| < \epsilon,$$

NOTA * $y_n \neq 0$ para todo n, ya que $\{y_n\}$ es estrictamente decreciente y $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

ó $\quad |(x_k - x_{k+1}) - l(y_k - y_{k+1})| < \epsilon(y_k - y_{k+1})$

donde
$$l = \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n+1})/(y_n - y_{n+1}) .$$

Entonces :

$$l(y_k - y_{k+1}) - \epsilon(y_k - y_{k+1}) < x_k - x_{k+1} < l(y_k - y_{k+1}) + \epsilon(y_k - y_{k+1}) . \quad (1)$$

Sumando esta desigualdad con respecto a k *de* n *a* m $(m > n \geq N)$ *se tie ne :*

$$l(y_n - y_{m+1}) - \epsilon(y_n - y_{m+1}) < x_n - x_{m+1} < l(y_n - y_{m+1}) + \epsilon(y_n - y_{m+1}) .$$

Tomando límite cuando $m \to \infty$ (*nótese que* $\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} y_m = 0$) :

$$l\, y_n - \epsilon\, y_n \leq x_n \leq l\, y_n + \epsilon\, y_n .$$

Dividiendo por y_n ($y_n > 0$ *ya que* $\{y_n\}$ *es estrictamente decreciente y tiende a cero*) :

$$l - \epsilon \leq \frac{x_n}{y_n} \leq l + \epsilon$$

o sea
$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \epsilon \qquad (\text{ para todo } n \geq N) .$$

EJERCICIO 34.

Sea $\{y_n\}$ *creciente y divergente a* $+\infty$. *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión tal que* $\{(x_n - x_{n+1})/(y_n - y_{n+1})\}$ *converge , demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} .$$

<u>*Sugerencia.*</u>

Similar al ejercicio 32.

EJERCICIO 35.

Sea $a_n = n^n/n!$, *demostrar*

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ $\qquad$ ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$.

Solución .

i) Inmediato .

ii) Aplicando el ejercicio 23 tenemos :

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} .$$

Observación .

La demostración de ii) sin utilizar el ejercicio 23 no es tan fácil.

Sea

$$b_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{1\ 2\ 3 \ldots\ n}{n\ n\ n \ldots\ n}}$$

entonces

$$\log b_n = \frac{1}{n} \left\{ \log \frac{1}{n} + \log \frac{2}{n} + \ldots . + \log \frac{n}{n} \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log \frac{k}{n} \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} \int_0^1 \log x \, dx = (x \log x - x) \Big|_0^1 \overset{\#}{=} - 1.$$

Entonces

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e^{-\log b_n} \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} e^{1} = e .$$

 # Nota :

$$x \log x \Big]_{x=0} = \lim_{x \to 0+} x \log x = 0 .$$

EJERCICIO 36 .

Sea $\{ a_n \}$ una sucesión tal que

$$|a_n| \leqslant 2 , \quad | a_{n+2} - a_{n+1} | \leqslant \frac{1}{8} | a_{n+1}^2 - a_n^2 | .$$

Demostrar que $\{ a_n \}$ es convergente .

Solución .

$$| a_{n+2} - a_{n+1} | \leqslant \frac{1}{8} | a_{n+1} - a_n | | a_{n+1} + a_n |$$

$$\leqslant \frac{1}{8} | a_{n+1} - a_n | \{ |a_{n+1}| + |a_n| \} \leqslant \frac{1}{2} |a_{n+1} - a_n| \qquad (1)$$

En la desigualdad anterior, reemplazando $n = 1, 2, 3, \ldots.$ sucesivamente:

$$|a_3 - a_2| \leqslant \frac{1}{2}|a_2 - a_1|$$

$$|a_4 - a_3| \leqslant \frac{1}{2}|a_3 - a_2|$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n| \ .$$

Multiplicando miembro a miembro estas n *desigualdades* ·

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2^n}|a_2 - a_1| \ . \qquad (2)$$

Entonces :

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+2} - a_{n+1}|$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2^{n+p-2}} + \frac{1}{2^{n+p-3}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right]|a_2 - a_1|$$

$$< \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right]|a_2 - a_1| = \frac{1}{2^{n-1}}|a_2 - a_1|^{\#} \ ,$$

por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ *satisface la condicín de Cauchy (propiedad 20), o sea que* $\{a_n\}$ *es convergente.*

NOTA #

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{1}{1-(1/2)} = 2 \quad (\text{serie geométrica})$$

EJERCICIO 37.

Sean

$$a_1 > b_1 > 0 \ , \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \ , \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}} \ ,$$

demostrar que las dos sucesiones $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ *convergen al mismo límite.*

<u>*Solución*</u>.

$$a_n - b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}}}{2} = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2}$$

$$= \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})}{2(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})} \ ,$$

luego :

$$|a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2}\,|a_{n-1} - b_{n-1}| \qquad (\textit{para todo } n)\,.$$

Reemplazando $n = 2, 3, 3, \ldots, n$ *y multiplicando las* $n-1$ *desigualdades obtenidas miembro a miembro, tenemos:*

$$|a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\,|a_1 - b_1| \tag{1}$$

Sea

$$a_k = b_k + \epsilon_k$$

de (1) *tenemos* :

$$|\epsilon_k| \leqslant c/2^k \tag{2}$$

donde

$$c = 2\,|a_1 - b_1|\,.$$

De la igualdad $a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1})$ *tenemos* :

$$2\,a_k = a_{k-1} + a_{k-1} - \epsilon_{k-1}$$

ó

$$a_k - a_{k-1} = -\epsilon_{k-1}/2\,.$$

Entonces :

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \ldots$$

$$\ldots + (a_{n+1} - a_n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\{|\epsilon_{n+p-1}| + |\epsilon_{n+p-2}| + \ldots + |\epsilon_n|\}$$

$$\leqslant \frac{c}{2}\left\{\frac{1}{2^{n+p-1}} + \frac{1}{2^{n+p-2}} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right\}$$

$$\leqslant \frac{c}{2}\left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots\right\} = \frac{c}{2^n}\,.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ *satisface la* condición de Cauchy (propiedad 20), *o sea que existe el límite:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l\,.$$

De (1) :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + l = l\,. \qquad \blacksquare$$

EJERCICIO 38.

Sean

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \; b_1 = \sqrt{ab}, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}); \; b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

$(a > 0, b > 0)$,

demostrar que las dos sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ convergen al mismo límite l y que

i) si $a < b$, $a = b\cos\theta$ entonces $l = b\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

ii) Si $a > b$, $a = b\cosh\theta$ entonces $l = b\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{\theta}$.

<u>Solución</u>.

i) Suponemos que $a < b$, $a = b\cos\theta$, entonces

$$a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b(1+\cos\theta)}{2} = \frac{b(2\cos^2\theta/2)}{2} = b\cos^2(\theta/2),$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b} = \sqrt{b^2\cos^2(\theta/2)} = b\cos(\theta/2).$$

Por lo tanto

$$a_1 = b_1\cos(\theta/2).$$

Por inducción se puede demostrar:

$$a_n = b_n\cos(\theta/2^n). \qquad (1)$$

Entonces:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}b_n\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right) = b_n\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}},$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{b_n^2\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} = b_n\cos\left[\frac{\theta}{2^{n+1}}\right]. \qquad (2)$$

Por lo tanto obtenemos la siguiente igualdad:

$$b_n = b\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}. \qquad (3)$$

Por otra parte:

$$\operatorname{Sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\left[2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^2}\right]\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2^n\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\theta}{2},$$

de (3) tenemos :

$$b_n = \frac{b \ \text{sen} \ \theta}{2^n \ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{(b \ \text{sen} \ \theta)\cdot(\theta/2^n)}{\theta \cdot \text{sen} \ (\theta/2^n)} \to \frac{b\cdot \text{sen} \ \theta}{\theta} \quad (n \to \infty).$$

De (1) :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{b\cdot\text{sen} \ \theta}{\theta}.$$

ii) Demostración similar a i) ■

EJERCICIO 39.

Sean $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n \quad (a_1 > 0, b_1 > 0),$$

demostrar que las dos sucesiones son monótonas y convergen al límite $\sqrt{a_1 b_1}$.

Solución.

$$b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_{n+1}} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n},$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \geqslant 0,$$

luego

$$a_n \geqslant b_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Pero,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leqslant 0,$$

por lo tanto la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. También:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} - b_n = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n} \geqslant 0$$

de donde la sucesión $\{b_n\}$ es creciente.

Si $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ entonces :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \{2 a_{n+1} - a_n\} = 2L - L = L.$$

De la condición $a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n$ se tiene por inducción que

$$a_n\, b_n = a_1\, b_1 \quad (\text{para todo } n)$$

luego :

$$\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = L\, L = a_1\, b_1$$

o sea:

$$L = \sqrt{a_1\, b_1}\ .$$

EJERCICIO 40 .

Sea $\{a_n\}$ *tal que*

$$a_1 = 2,\ a_2 = 8\ ,\ a_{2n+1} = \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1})\ ,\ a_{2n+2} = \frac{a_{2n}\, a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$$

demostrar que $\{a_n\}$ *converge a* 4 .

<u>*Solución*</u> .

Evidentemente $a_k \geq 0$ *para todo* k . *Además :*

$$a_{2n+1} - a_{2n+2} = \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1}) - \frac{2\, a_{2n}\, a_{2n-1}}{a_{2n} + a_{2n-1}}$$

$$= \frac{(a_{2n} - a_{2n-1})^2}{2(a_{2n} + a_{2n-1})} \geq 0\ ,$$

luego :

$$a_{2n-1} - a_{2n+1} = a_{2n-1} - \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1})$$

$$= \frac{1}{2}(a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0\ .$$

Esto es, la subsucesión $\{a_{2n-1}\}$ *es decreciente , entonces existe el límite :*

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = l\ .$$

De la relación $a_{2n+1} = \{a_{2n} + a_{2n-1}\}/2$ *se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \{2\, a_{2n+1} - a_{2n-1}\} = 2l - l = l\ .$$

Pero :

$$a_{2n+2}\, a_{2n+1} = a_{2n}\, a_{2n-1} = \ldots\ldots = a_4\, a_3 = a_2\, a_1,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+2}\, a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+2} \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = l^2 = a_2\, a_1 = 16,$$

o sea

$$l = 4.$$

<u>Observación</u>

El ejercicio 40 es un caso particular del ejercicio 39 tomando las dos subsucesiones $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$ en lugar de $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

EJERCICIO 41.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n} \quad , \quad k > 0 \; , \; a_1 > 0 ,$$

demostrar que $\{a_n\}$ es monótona y converge a la raíz positiva de la ecuación

$$x^2 = x + k .$$

<u>Solución</u>.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{k + a_n} - \sqrt{k + a_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{k + a_n} + \sqrt{k + a_{n-1}}} .$$

Si $a_2 \geqslant a_1$ se tiene que $a_{n+1} \geqslant a_n$ para todo n, o sea que $\{a_n\}$ es creciente. Si $a_2 \leqslant a_1$ se tiene que $a_{n+1} \leqslant a_n$ para todo n, o sea que $\{a_n\}$ es decreciente.

Si $\{a_n\}$ es creciente, entonces

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{k + a_n} - a_n \geqslant 0 ,$$

o sea

$$(a_n)^2 - a_n - k \leqslant 0 .$$

Esto es,

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2} ,$$

por lo tanto $\{a_n\}$ es superiormente acotada.

En ambos casos $\{a_n\}$ es monótona y acotada, luego existe el límite :

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Pero como $(a_{n+1})^2 - a_n - k = 0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{(a_{n+1})^2 - a_n - k\} = l^2 - l - k = 0 ,$$

de donde l es la raíz positiva de la ecuación $x^2 = x + k$.

EJERCICIO 42.

Sea

$$a_{n+1} = \frac{k}{1+a_n} \qquad (k>0,\ a_1>0),$$

demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ converge a la raíz positiva de la ecuación

$$x^2 + x = k.$$

<u>Solución</u>.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{k}{1+a_n} - \frac{k}{1+a_{n-1}} = \frac{k\,(a_{n-1} - a_n)}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$$

$$= \frac{a_n}{1+a_n}\,(a_{n-1} - a_n).$$

Pero:

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{k/(1+a_{n-1})}{1+\dfrac{k}{1+a_{n-1}}} = \frac{k}{1+k+a_{n-1}} < \frac{k}{1+k},$$

luego

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{k}{1+k}\,|a_n - a_{n-1}| \qquad (\text{para todo } n).$$

Por lo tanto (ver el ejercicio 35):

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \left[\frac{k}{1+k}\right]^{n-1} |a_2 - a_1| = c\,\epsilon^{n-1} \tag{1}$$

donde $c = |a_2 - a_1|$, $\epsilon = k/(1+k) < 1$.

De (1) tenemos:

$$|a_{m+p} - a_m| = |a_{m+p} - a_{m+p-1} + a_{m+p-1} - a_{m+p-2} + \dots + a_{m+1} - a_m|$$

$$\leqslant c\,\{\epsilon^{m+p-2} + \epsilon^{m+p-3} + \dots + \epsilon^{m-1}\}$$

$$< c\,\epsilon^{m-1}\{1+\epsilon+\epsilon^2+\dots\} = \frac{c\,\epsilon^{m-1}}{1-\epsilon},$$

esto es, la sucesión $\{a_n\}$ satisface la condición de Cauchy ya que

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon^{n-1} = 0,$$

luego existe el límite :

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n \, .$$

De la relación $a_{n+1} = k/(1 + a_n)$ *se tiene como límite :*

$$l = \frac{k}{1+l}$$

o sea

$$l^2 + l - k = 0 \, . \qquad (2)$$

La ecuación (2) tiene una raíz positiva y una raíz negativa, pero como $a_n \geqslant 0$ *para todo* n *entonces* $l \geqslant 0$, *o sea que* l *es la raíz positiva de la ecuación*

$$x^2 + x = k \, .$$

EJERCICIO 43.

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que*

$$a_{n+1} = \frac{k}{a_n} - 1 \qquad (k > 0 \, , \; a_1 < 0)$$

demostrar que $\{a_n\}$ *converge a la raíz negativa de la ecuación* $x^2 + x = k$.

<u>*Solución*</u>.

Evidentemente $a_n < -1$ *para todo* $n \geqslant 2$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{k}{a_n} - \frac{k}{a_{n-1}} = \frac{k(a_{n-1} - a_n)}{a_n \, a_{n-1}} \, ,$$

pero

$$0 < \frac{k}{a_n \, a_{n-1}} = \frac{k}{\left[\frac{k}{a_{n-1}} - 1\right] a_{n-1}} = \frac{k}{k - a_{n-1}} < \frac{k}{k+1} \, ,$$

entonces

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{k}{k+1} |a_n - a_{n-1}| \qquad (\text{para todo } n)$$

Por un procedimiento idéntico al utilizado en el ejercicio 42 se tiene que existe el límite :

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n \, ,$$

y que l *es la raíz negativa de la ecuación* $x^2 + x = k$. ∎

EJERCICIO 44.

Sea $\{a_n\}$ *tal que*

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \quad 3\,a_{n+1} = 2 + (a_n)^3$$

demostrar que $\{a_n\}$ *tiende a* 1. *Modificar el valor de* a_1 *para que el límite de la sucesión sea igual a* -2.

<u>*Solución*</u>.

(i) $$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}\{ 2 + (a_n)^3 - (2 + a_{n-1}^3) \}$$

$$= \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1})\{(a_n)^2 + a_n\, a_{n-1} + (a_{n-1})^2\}.$$

Pero, como

$$(a_n)^2 + a_n\, a_{n-1} + (a_{n-1})^2 = \{ a_n + \frac{1}{2} a_{n-1}\}^2 + \frac{3}{4}(a_{n-1})^2 \geqslant 0$$

entonces $\{a_n\}$ *es <u>monótona</u>. Ademas*

$$a_2 = \frac{1}{3}\{2 + (-3/2)^3\} = -\frac{11}{24} > -\frac{3}{2},$$

entonces $\{a_n\}$ *es creciente. De la relación* $3\,a_{n+1} = 2 + (a_n)^3$ *se verifica por inducción que* $a_n \leqslant 1$ *para todo* n, *entonces existe el límite*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

De $3\,a_{n+1} = 2 + (a_n)^3$, *tomando límite cuando* $n \to \infty$ *se tiene*:

$$3\,L = 2 + L^3$$

o sea

$$(L - 1)^2 (L + 2) = 0$$

Pero como $L \geqslant a_n \geqslant a_1 = -\frac{3}{2}$, *se tiene que* $L = 1$.

(ii) $$a_2 - a_1 = \frac{1}{3}(2 + a_1^3) - a_1 = \frac{1}{3}\{a_1^3 - 3\,a_1 + 2\}$$

$$= \frac{1}{3}(a_1 - 1)^2 (a_1 + 2).$$

Entonces, si $a_1 > -2$ *la sucesión* $\{a_n\}$ *es creciente y si* $a_1 < -2$ *la sucesión es decreciente, esto es, si* $a_1 > -2$ *el límite de* $\{a_n\}$ (*si existe*) *debe ser mayor que* -2, *y si* $a_1 < -2$ *el límite de* $\{a_n\}$ (*si existe*) *es menor que* -2. *Si* $a_1 = -2$ *se tiene que* $a_n = -2$ *para todo* n, *entonces* :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2.$$

NOTA

Si $-2 < a_1 \leq 1$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Si $a_1 < -2$, ó $a_1 > 1$ la sucesión es divergente porque el límite de la sucesión, si existe, debe ser 1 ó -2. ■

EJERCICIO 45.

Sea $\{a_n\}$ tal que

$$a_{n+1} = \frac{3(1 + a_n)}{3 + a_n} \quad , \quad a_1 = 3$$

demostrar que $\{a_n\}$ tiende a $\sqrt{3}$.

Solución.

$$a_{n+1} = 3 - \frac{6}{3 + a_n} \quad .$$

Si $a_n > \sqrt{3}$ se tiene :

$$a_{n+1} > 3 - \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} \, ,$$

entonces, por inducción tenemos

$$a_n > \sqrt{3} \qquad \text{para todo } n.$$

También :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-(a_n^2 - 3)}{a_n + 3} < 0 \, , \tag{1}$$

por consiguiente la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y acotada, entonces existe el límite :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \, .$$

De (1) se tiene inmediatamente que

$$L^2 - 3 = 0$$

o sea

$$L = \sqrt{3}$$

ya que $L > 0$. ●

EJERCICIO 46.

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ tales que

$$a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad b_{n+2} = b_n + b_{n+1}, \quad b_1 = b_2 = 1$$

hallar el límite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución.

De $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ se tiene:

$$\left[b_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} b_{n+1} \right] = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \left[b_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} b_n \right].$$

Como $\left|\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ se tiene que (ver ejercicio 7):

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ b_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} b_n \right\} = 0 .$$

O sea:

$$\lim_{n\to\infty} b_n \left\{ a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} = 0 . \qquad (1)$$

Por otra parte:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \geqslant b_{n-1} \quad (\text{nótese que } b_{n-2} \geqslant 0)$$

luego:

$$b_n \geqslant b_{n-1} \geqslant \dots \geqslant b_2 = 1 .$$

Por lo tanto, de (1) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} . \blacksquare$$

EJERCICIO 47.

Sea $\{a_n\}$ tal que

$$a_{n+1} = k\, a_n + l\, a_{n-1} \qquad (k, l > 0).$$

Demostrar que $\{a_n / \lambda^n\}$ converge al límite $(a_2 - a_1 \mu)/\lambda(\lambda - \mu)$ donde λ es la raíz positiva, μ es la raíz negativa de la ecuación $x^2 - kx - l = 0$.

Solución.

En el ejercicio 12, fórmula (5), tomando $b = -k$, $c = -l$ tenemos:

$$a_n = \frac{\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu} a_2 - \frac{\lambda^{n-2} - \mu^{n-2}}{\lambda - \mu} \lambda \mu a_1 . \qquad (1)$$

Por lo tanto :

$$\frac{a_n}{(\lambda)^n} = \frac{1 - (\mu/\lambda)^{n-1}}{\lambda(\lambda - \mu)}\, a_2 - \frac{\mu\{1 - (\mu/\lambda)^{n-2}\}}{\lambda(\lambda - \mu)}\, a_1 \qquad (2)$$

Pero como :

$$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| = \left|\frac{k - \sqrt{k^2 + 4l}}{k + \sqrt{k^2 + 4l}}\right| = \frac{\sqrt{k^2 + 4l} - k}{\sqrt{k^2 + 4l} + k} < 1$$

entonces $(\mu/\lambda)^n \to 0$ $(n \to \infty)$, por lo tanto

$$\frac{a_n}{(\lambda)^n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{a_2}{\lambda(\lambda - \mu)} - \frac{\mu\, a_1}{\lambda(\lambda - \mu)} = \frac{a_2 - a_1 \mu}{\lambda(\lambda - \mu)}\ .\blacksquare$$

EJERCICIO 48 .

En el ejercicio 47 , si $k + l = 1$ demostrar que $\{a_n\}$ tiende al límite $(a_2 + l\, a_1)/(1 + l)$.

En particular, si $k = l = 1/2$ las dos subsucesiones $\{a_{2n-1}\}, \{a_{2n}\}$ son monótonas y convergen al límite común $\frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$.

Solución .

i) Si $k + l = 1$ entonces la ecuación

$$x^2 - kx - l = x^2 - (1 - l)x - l = 0$$

tiene las dos raíces $x = 1, -l$, o sea, $\lambda = 1$, $\mu = -l$. De (1) del ejercicio 47 tenemos :

$$a_n = \frac{1 - (-l)^{n-1}}{1 + l}\, a_2 + \frac{1 - (-l)^{n-2}}{1 + l}\, l\, a_1$$

$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{a_2}{1 + l} + \frac{l\, a_1}{1 + l} = \frac{a_2 + l\, a_1}{1 + l}\ .$$

ii) De i) :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_2 + (1/2)\, a_1}{1 + (1/2)} = \frac{a_1 + 2a_2}{3}\ .$$

También tenemos :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) = \frac{1}{4}(a_{n-1} + a_{n-2}) + \frac{1}{2}\, a_{n-1}\ ,$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2} a_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{4} (a_{n-2} + a_{n-3}) ,$$

por lo tanto :

$$a_{n+1} - a_{n-1} = \frac{1}{4} (a_{n-1} - a_{n-3}) ,$$

esto es , $\{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\}$ *son monótonas .* ■

EJERCICIO 49 . ⊕

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que*

$$a_1 > 0 \quad , \quad a_{n+1} = [a_1]^{a_n}$$

demostrar que $\{a_n\}$ *converge si y sólo si*

$$e^{-e} \leqslant a_1 \leqslant e^{1/e} \qquad \text{(Seidel , 1870)}$$

Solución .

Suponemos que existe el límite : $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ *, entonces*

$$b = (a_1)^b .$$

Sea $a_1 = e^k$ *entonces tenemos:*

$$b = e^{kb} . \tag{1}$$

Por el calculo elemental # sabemos que la ecuación $x = e^{kx}$ *tiene solución si y sólo si* $k \leqslant e^{-1}$*. Con lo cual tenemos una condición necesaria para la convergencia de la sucesión* $\{a_n\}$ *:*

$$k \leqslant e^{-1} \quad (\text{ o sea, } a_1 \leqslant e^{1/e}) \tag{2}$$

* * * * * * * * * * * * *

 # Si $y = x$ *es recta tangente a la curva* $y = e^{kx}$ *, se tiene*

$$k = e^{-1} ,$$

por lo tanto , si $k > e^{-1}$ *la ecuación* $x = e^{kx}$ *no tiene raíz .*

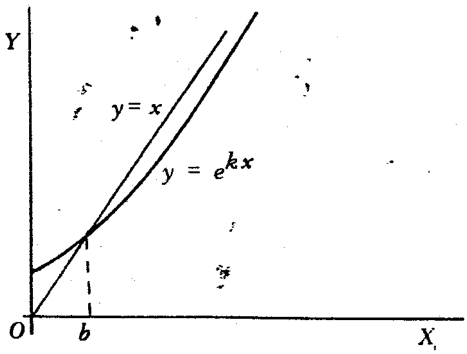


FIG. 16

[I] $k \geq 0$ (ó sea , $a_1 > 1$).

$$a_{n+1} - a_n = e^{k a_n} - e^{k a_{n-1}}$$

$$= k\, e^{k\theta_n} (a_n - a_{n-1}) \quad \text{(Teorema del valor medio)}$$

(3)

en donde θ_n está entre a_n y a_{n-1}. Como $k\, e^{k\theta_n} \geq 0$ entonces (3) implica que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona.

Si suponemos que $a_n \leq e$ entonces

$$a_{n+1} = e^{k a_n} \leq e^{k e} \leq e^{e^{-1} e} = e$$

por consiguiente, se tiene por inducción que :

$$a_n \leq e \quad (\text{para todo } n). \tag{4}$$

Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es monótona y acotada, es decir que es convergente.

[II] $k < 0$ (o sea , $a_1 < 1$).

Sea b una raíz de la ecuación $x = e^{kx}$ # :

$b = e^{kb}$. [# Nótese que existe una sola raíz en caso de que $k < 0$.]

Tenemos :

$$a_{n+2} = e^{k a_{n+1}} = e^{k e^{k a_n}}, \quad b = e^{kb} = e^{k e^{kb}} \tag{5}$$

entonces

$$b - a_{n+2} = e^{k e^{kb}} - e^{k e^{k a_n}} = (e^{k e^{kx}} e^{kx} k^2) (b - a_n) \tag{6}$$

(Teorema del valor medio)

donde x está entre b y a_n.

(i) Si $a_n \to b$ $(n \to \infty)$ entonces $x \to b$, luego (Ejercicio 28)

$$| e^{k e^{kb}} e^{kb} k^2 | \leq 1 ,$$

o sea

$$| k b | \leq 1 \quad (\text{ó } kb \geq -1).$$

Entonces

$$-k e^{-1} \leq -k e^{kb} \leq 1, \quad \text{ó} \quad k \geq -e.$$

por lo tanto tenemos :

$$\boxed{a_1 \geqslant e^{-e}}.$$

(ii) Suponemos ahora que :

$$e^{-e} \leqslant a_1 < 1 \quad (\text{ó} \quad -e \leqslant k < 0).$$

De (6) se ve que las dos sucesiones $\{b - a_{2n}\}, \{b - a_{2n-1}\}$ *son monótonas y acotadas #, entonces existen los límites:*

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = b_1 \;, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = b_2 \;.$$

De (5), b_1, b_2 *satisfacen la siguiente ecuación :*

$$x = e^{k\, e^{kx}} \tag{7}$$

Sea

$$g(x) = x - e^{k\, e^{kx}}$$

entonces

$$g'(x) = 1 - k^2\, e^{kx}\, e^{k\, e^{kx}} \tag{8}$$

Sea $f(x) = k^2\, e^{kx}\, e^{k\, e^{kx}}$ *, entonces*

$$f'(x) = k^3 (1 + k\, e^{kx})\, e^{k(x + e^{kx})}$$

si $f'(x_o) = 0$ *entonces* $1 + k\, e^{k x_o} = 0$ *, y ademas*

$$f'(x) > 0 \quad \text{cuando} \quad x < x_o$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{cuando} \quad x > x_o \;,$$

por lo tanto, $f(x)$ *toma el valor máximo en* $x = x_o$ *, y*

$$f(x_o) = k^2\, e^{k(x_o + e^{k x_o})} = k^2\, e^{k x_o - 1} = -k\, e^{-1} = |k|\, e^{-1} \leqslant 1.$$

De (8) :

$$g'(x) = 1 - k^2\, e^{kx}\, e^{k\, e^{kx}} \geqslant 1 - |k|\, e^{-1} \geqslant 0 \;,$$

* * * * * * * * * * * *

\# $0 < a_n \leqslant e$ *entonces* $b > b - a_n \geqslant b - e$.

o sea que g *es creciente, esto es, la ecuación* (7) *tiene una sola raíz :* $b_1 = b_2$. *Entonces :*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b_1 = b_2 . \quad \bullet$$

EJERCICIO 50.

Sea $f(x)$ *continua, positiva en* $[a, b]$, *si* M *es el valor máximo de* $f(x)$ *en* $[a, b]$, *demostrar que :*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b \{ f(x) \}^n \, dx} = M .$$

Solución.

i) $\quad f(x) \leqslant M \qquad$ *para todo* x *en* $[a, b]$,

entonces $\qquad \{ f(x) \}^n \leqslant M^n$,

$$\int_a^b (f(x))^n \, dx \leqslant M^n \, (b - a) \quad ,$$

luego :

$$\sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n \, dx} \leqslant M \, (b - a)^{1/n} .$$

Entonces :

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n \, dx} \leqslant M \, \overline{\lim} \, (b - a)^{1/n} = M . \qquad (1)$$

ii) *Sea* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = M$, *como* f *es continua en* c, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* δ *tal que*

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \subset [a, b] \quad \textit{implica} \quad f(x) > M - \epsilon .$$

Entonces :

$$\int_a^b (f(x))^n \, dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} (f(x))^n \, dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} (M - \epsilon)^n \, dx = 2\delta \, (M - \epsilon)^n \quad ,$$

o sea

$$\sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n \, dx} \geqslant (2\delta)^{1/n} \, (M - \epsilon) ,$$

entonces

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n \, dx} \geqslant \underline{\lim} \, (2\delta)^{1/n} \, (M - \epsilon) = M - \epsilon .$$

Como ϵ *es cualquiera, se tiene :*

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n \, dx} \geq M . \qquad (2)$$

De (1) *y* (2) :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n \, dx} = M . \quad \blacksquare$$

CAPITULO II

SERIES

§ 9. Series

Dada una sucesión

$$\{ a_n \} = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots \}$$

si se trata de sumar todos los elementos de la sucesión el método más factible es sumar sucesivamente los términos como sigue :

la primera suma	$S_1 = a_1$,	
la segunda suma	$S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2$,	
la tercera suma	$S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$,	
......	....	....
la enésima suma	$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$,	
......	....	....

* * * * * * * * * * * * * * *

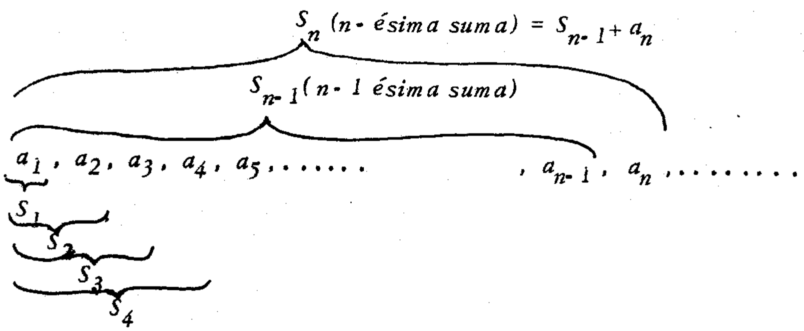


FIG . 17

Este procedimiento de las sumas sucesivas seguirá sin terminar , así se obtiene una nueva sucesión $\{ S_n \}$ que representa el procedimiento de la sumación de los términos de $\{ a_n \}$:

$$\{ S_n \} = \{ a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots \} \quad (1)$$

esta nueva sucesión (1) se llama *SERIE* y se nota :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad (2)$$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ que representa n-ésima suma se llama la suma parcial de los primeros n términos de la serie (2) .

EJEMPLO 9 .

i) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$

Como $S_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ términos}} = n$ *, entonces la serie daaa es igual a la sucesión :*

$$\{S_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{k-1} + \dots$,

$S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 1 = 0$, $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$,

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases},$$

entonces la serie es igual a la sucesión :

$$\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots\}.$$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - (1/2)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (1/2)^n ,$$

entonces la serie es igual a la sucesión :

$$\{S_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots\right\}.$$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

entonces la serie es igual a la sucesión :

$$\{S_n\} = \{ 1, 3, 6, 10, \ldots , \frac{n(n+1)}{2}, \ldots \}.$$

Nótese que en i) y iv) la sucesión $\{S_n\}$ *diverge a* $+\infty$ *, en ii) la sucesión* $\{S_n\}$ *diverge* ($\overline{\lim}\ S_n = 1$, $\underline{\lim}\ S_n = 0$) *y en iii)* $\{S_n\}$ *converge a* 1.●

Si la sucesión $\{ S_n\}$ converge a S (ó diverge a $\pm\infty$) entonces se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S (ó diverge a $\pm\infty$) y se nota

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad (ó\ \pm\infty) \quad (3)$$

El número S se llama *LIMITE* o *SUMA TOTAL* de la serie .

Si $\{ S_n\}$ diverge , entonces se dice que la serie *DIVERGE* .

EJEMPLO 10 .

De la división ordinaria se tiene :

$$\frac{1}{3} = 0.3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3 \ldots \quad (\textit{número decimal infinito}) \quad (4)$$

Así , obtenemos una serie :

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots\ldots$$

Entonces :

$$a_n = \frac{3}{10^n}\ ,\quad S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10}\ \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n} \right) .$$

Evidentemente :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ *converge a* $\frac{1}{3}$.

Se observa que nuestra notación (3) es consistente con la expresión (4) .■

<u>Nota</u> Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S entonces el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ representa dos cosas diferentes : la sucesión $\{S_n\} = \{a_1, a_1 + a_2, \ldots \}$

y el valor numérico S, pero si la serie diverge entonces el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no representa ningún valor numérico. Por ejemplo (ejemplo 9):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots \right\} & \textit{como SUCESION} \\ 1 & \textit{como valor numérico}. \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \{1, 0, 1, 0, \ldots\} \quad \textit{como SUCESION}.$$

EJEMPLO 11 (Serie Geométrica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots .$$

Sea S_n la suma parcial de los primeros n términos, entonces:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ -)\ rS_n & = & \quad\ ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n & = & a - ar^n \end{array}$$

o sea

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (\textit{si } r \neq 1). \tag{5}$$

Sabemos que $r^n \to 0$ si $|r| < 1$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad \textit{si} \quad |r| < 1. \tag{6}$$

La serie DIVERGE si $|r| \geq 1$.

EJEMPLO 12 (Serie Aritmética)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{a + b(n-1)\} = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots .$$

Sea S_n la suma parcial de los primeros n términos, entonces:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a + (a+b) + \cdots + (a+(n-2)b) + (a+(n-1)b) \\ +)\ S_n & = & (a+(n-1)b) + (a+(n-2)b) + \cdots + (a+b) + a \\ \hline 2S_n & = & (2a+(n-1)b) + (2a+(n-1)b) + \cdots + (2a+(n-1)b) + (2a+(n-1)b) \\ & = & n\{2a + (n-1)b\}, \end{array}$$

o sea :

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)b\}}{2} \tag{7}$$

por lo tanto la serie diverge a $+\infty$, o diverge a $-\infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{a+(n-1)b\} = \begin{cases} +\infty & si \;\; b>0 \;\; (ó,\; b=0 \;,\; a>0) \\ -\infty & si \;\; b<0 \;\; (ó \;\; b=0 \;,\; a<0). \end{cases}$$

EJEMPLO 13. (Serie Armónica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \;\cdots\cdots\; + \frac{1}{n} + \cdots\cdots \tag{8}$$

Sea S_n la suma parcial de los primeros n términos, entonces

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + 2\times\frac{1}{4} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4\times\frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ,$$

en general :

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} > S_{2^n} + 2^n \times \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= S_{2^n} + \frac{1}{2} ,$$

Por inducción se tiene que

$$S_{2^n} > \frac{n}{2} \to \infty \quad (n\to\infty) ,$$

entonces la serie diverge a $+\infty$. ■

TEOREMA 1

i) Si dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \;, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (c\,a_n + d\,b_n)$ es también convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c\,a_n + d\,b_n) = c\,A + d\,B \;.$$

ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c\, a_n + d\, b_n) \quad (c \neq 0) \text{ diverge.}$$

Demostración.

$$\sum_{k=1}^{n} (c\, a_k + d\, b_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k + d \sum_{k=1}^{n} b_k$$

y aplicando la propiedad 6 de las sucesiones se tiene la demostración.

ii) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} (c\, a_n + d\, b_n)$ *fuera convergente, entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (c\, a_n + d\, b_n) - \frac{d}{c} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (\text{por (i)}).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sería convergente (absurdo!).*

EJEMPLO 14.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$, *como las dos series* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$ *son convergentes, entonces la serie dada converge.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}.$$

EJEMPLO 15.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^n}$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ *diverge a* $+\infty$ *mientras que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n)$ *converge, entonces la serie dada diverge (diverge a* $+\infty$*).*

EJEMPLO 16.

Del ejemplo 13 sabemos que las dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$$

divergen (la primera diverge a $+\infty$, la segunda diverge a $-\infty$), pero se puede demostrar que la suma de las dos series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$$

converge como sigue: Sea S_n la suma parcial entonces:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

EJEMPLO 17.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$ diverge a $+\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)$ diverge a $-\infty$, y la suma $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ también diverge (Ejemplo 12). ■

Nótese que la relación

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c\, a_n + d\, b_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

es una relación numérica sólo en caso de que ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen. ■

EJERCICIO 51.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S, demostrar que la serie

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$$

también converge y su suma total es igual a $\{S - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\}$.

Sugerencia.

Aplicar la definición de la suma total.

EJERCICIO 52.

Investigar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots\cdots .$$

Sugerencia

Demostrar por inducción que:

$$\{S_n\} = \{\ 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \qquad \}$$

o sea

$$S_{2n} = -n \quad , \quad S_{2n-1} = n .$$

EJERCICIO 53.

Demostrar :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1} = -\infty .$$

Sugerencia.

$$S_n = \log(1/2) + \log(2/3) + \dots + \log \frac{n}{n+1}$$

$$= \log \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdots \cdots \frac{\cancel{n}}{n+1} = \log \frac{1}{n+1} .$$

EJERCICIO 54.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$, i) hallar la suma parcial de la serie , ii) investigar la convergencia o divergencia de la serie .

Sugerencia.

$$\begin{aligned} S_n &= x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + n x^n \\ -)\quad x S_n &= \phantom{x + {}} x^2 + 2x^3 + \dots + (n-1) x^n + n x^{n+1} \\ \hline (1-x) S_n &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n x^{n+1} \\ &= \frac{x(1-x^n)}{1-x} - n x^{n+1} \qquad (x \neq 1) . \end{aligned}$$

EJERCICIO 55.

Hallar la suma parcial de las siguientes series , e investigar la convergencia o divergencia.

i) $0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ $\qquad$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1/2)^{n-1}$

iv) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^{n-1}} + \dots$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$ $\qquad$ vi) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{4})^{n+1}$

vii) $0.2 + 0.22 + 0.222 + 0.2222 + \ldots.$

viii) $\sum_{k=1}^{\infty} (2k - 1)$ ix) $a + 3a^3 + 5a^5 + \ldots.$

x) $3 - 9 + 27 - \ldots + (-1)^{n-1} 3^n + \ldots$

RESPUESTA

i) $S_n = \frac{1}{9}\{ 1 - \frac{1}{10^n}\}$, $S = \frac{1}{9}$

ii) $S_n = 2(2^n - 1)$, la serie diverge a $+\infty$.

iii) $S_n = \frac{2}{3}\{ 1 - (-\frac{1}{2})^n\}$, $S = \frac{2}{3}$

iv) $S_n = 3(1 - \frac{1}{3^n})$, $S = 3$.

v) $S_n = \frac{1}{8}(1 - \frac{1}{2^n})$, $S = \frac{1}{8}$

vi) $S_n = \frac{1}{20}\{ 1 - (-1/4)^n\}$, $S = \frac{1}{20}$

vii) $S_n = 2\left[\frac{n}{10} + \frac{n-1}{10^2} + \ldots + \frac{2}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n}\right]$

$$= \frac{2}{10}\left[1 + 2\times 10 + 3\times 10^2 + \ldots. + n\cdot 10^{n-1}\right]$$

$$= \frac{2}{9}n - \frac{2}{81} + \frac{2}{81}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$ (Utilizar Ejercicio 51).

la serie diverge a $+\infty$.

viii) $S_n = n^2$, la serie diverge a $+\infty$ (utilizar Ejemplo 12).

ix) $$S_n = \frac{a\{1 - (2n-1)a^{2n}\}}{1 - a^2} + \frac{2a^3(1 - a^{2n-2})}{(1 - a^2)^2} \qquad (a^2 \neq 0)$$

$$S = \frac{a}{1 - a^2} + \frac{2a^3}{(1 - a^2)^2} \qquad \text{si } |a| < 1.$$

la serie diverge si $|a| \geqslant 1$.

x) $S_n = \frac{3}{4}\{1 - (-3)^n\}$, la serie diverge.

§ 10 Serie telescópica

Para encontrar la suma total de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tenemos que calcular primero la suma parcial $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ pero no existe un método general para hallar S_n . Uno de los muy pocos casos en que es posible calcular el valor de S_n es el siguiente .

Si se puede expresar a_n en la forma :

$$a_n = b_{n+1} - b_n \quad \#$$

entonces

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$= b_2 - b_1 + \cancel{b_3} - \cancel{b_2} + b_4 - \cancel{b_3} + \ldots + b_{n+1} - \cancel{b_n}$$

$$= b_{n+1} - b_1 .$$

La serie de este tipo , $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ (ó $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$) se llama serie telescópica .

* * * * * * * * * * * * * * *

Nota : # *Si* $a_n = b_n - b_{n+1}$ *entonces*

$$S_n = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - \ldots + \cancel{b_n} - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1} .$$

EJEMPLO 18 .

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

entonces $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

luego $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \; (n \to \infty)$.

Por lo tanto :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 .$$

EJEMPLO 19 (*Serie Geométrica*)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1}$.

Tenemos :

$$a r^k - a r^{k-1} = a r^{k-1}(r - 1)$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a\, r^{k-1}(r-1) = (r-1)\, S_n = a r^n - a r^0 = a r^n - a ,$$

luego :
$$S_n = \frac{a\, r^n - a}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} .$$

EJEMPLO 20

Hallar la suma parcial de las siguientes series e investigar la convergencia o divergencia.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx \quad (x \neq 0)$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \quad (x \neq 0)$

Solución.

i) $\cos \{k + 1 - \frac{1}{2}\} x - \cos \{k - \frac{1}{2}\} x = - 2 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} - 2 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen}\frac{x}{2} = - 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\cos (k + 1 - \frac{1}{2}) x - \cos (k - \frac{1}{2}) x]$$

$$= \cos (n + 1 - \frac{1}{2}) x - \cos (1 - \frac{1}{2}) x .$$

Dividiendo por $-2 \operatorname{sen} (x/2)$ tenemos :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\cos \frac{1}{2} x - \cos (n + \frac{1}{2}) x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x} \qquad (1)$$

Evidentemente la serie diverge ya que la sucesión $\{\cos (n + \frac{1}{2}) x\}$ es divergente .

ii) Utilizando la relación :

$$\operatorname{sen} (k + 1 - \frac{1}{2}) x - \operatorname{sen} (k - \frac{1}{2}) x = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \cos kx$$

se tiene :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}} . \qquad (2)$$

La serie diverge ya que la sucesión $\{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x\}$ *es divergente.*

Las fórmulas (1) y (2), que son muy importantes para los estudios posteriores, nos muestran que las sumas parciales son acotadas en ambos casos a pesar de ser divergentes las series.

NOTA

Sin utilizar la serie telescópica se puede demostrar las fórmulas (1) y (2) de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx + i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\cos kx + i \operatorname{sen} kx) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k$$

$$= \frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}} \qquad (\text{serie geométrica (5), § 8})$$

$$= \frac{e^{ix}(1-e^{inx})(1-e^{-ix})}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})}$$

$$= \frac{(\cos x + \cos nx - \cos(n+1)x - 1) + i(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} nx - \operatorname{sen}(n+1)x}{2 - 2\cos x}$$

Comparando la parte real y la parte imaginaria del resultado anterior se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos x - 1 + \cos nx - \cos(n+1)x}{2 - 2\cos x}$$

$$= \frac{-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} nx - \operatorname{sen}(n+1)x}{2 - 2\cos x}$$

$$= \frac{2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

EJERCICIO 56.

Hallar la suma parcial de las siguientes series e investigar la convergencia o divergencia.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

<u>Sugerencia</u>

i) $$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)},$$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \to \frac{1}{4} \quad (n \to \infty).$$

ii) $$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right\} - \left\{\frac{1}{(n+1)-1} + \frac{1}{n+1}\right\}\right].$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\left\{\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2}\right\} - \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right\}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right] \to \frac{3}{4}.$$

■

EJERCICIO 57.

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2$,

hallar la suma parcial S_n e investigar la convergencia o divergencia de la serie.

<u>Sugerencia</u>

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 .$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

La serie diverge a $+\infty$.

EJERCICIO 58 .

Hallar la suma parcial de las siguientes series :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n-1)$

iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots\ldots$

Sugerencia

Utilizar el ejercicio anterior .

i) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

También , puede utilizarse la siguiente identidad:

$$n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = 3n(n+1) .$$

ii) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(2n^2+3n-5)}{6}$

iii) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

EJERCICIO 59 .

Hallar la suma parcial de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3$$

Sugerencia

Utilizar : $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 .$$

EJERCICIO 60

Hallar la suma parcial de las siguientes series:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2-1)$

Sugerencia

Utilizar el ejercicio 58.

i) $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

También se puede utilizar la identidad:

$$k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2) = 4k(k+1)(k+2).$$

ii) $S_n = \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

EJERCICIO 61

Hallar la suma parcial de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)\ldots(n+j-1) \qquad (j \geqslant 1)$$

Sugerencia

$$k(+1)(k+2)\ldots(k+j) - (k-1)k(k+1)\ldots(k+j-1)$$
$$= j\,k(k+1)\ldots(k+j-1),$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+j)}{j}$$

EJERCICIO 62.

Hallar la suma total de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+j)} \qquad (j \geqslant 1).$$

Sugerencia

Utilizar

$$\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+j-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(k+j)} = \frac{j}{k(k+1)\ldots(k+j)},$$

$$S_n = \frac{1}{j}\left\{\frac{1}{j!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+j)}\right\} \underset{(n\to\infty)}{\to} \frac{1}{j\cdot j!} \quad .$$

EJERCICIO 63

Sea
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{a}{n} \quad ,$$

hallar la suma parcial de la serie .

<u>Sugerencia</u>

$$(-1)^n \binom{a}{n} = (-1)^n \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1 \quad 2 \quad 3 \qquad n}$$

$$= \frac{a}{n}\cdot\frac{1-a}{1}\cdot\frac{2-a}{2} \quad \cdots\cdot \quad \frac{(n-1)-a}{n-1}$$

$$= \frac{a}{n}\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right) \quad \cdots\cdot \left(1-\frac{a}{n-1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{a}{n-1}\right) - \left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{a}{n}\right),$$

$$S_n = 1 - (1-a)\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(1-\frac{a}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{a}{n}\right).$$

EJERCICIO 64.

Hallar la suma total de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\{n(n+1)\}^2}$$

<u>Sugerencia</u>

$$\frac{2n+1}{\{n(n+1)\}^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \quad ,$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \to 1 \quad (n\to\infty)$$

EJERCICIO 65

Hallar la suma total de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{n^2+n} \quad \operatorname{sen} \frac{1}{n^2+n}.$$

Sugerencia

$$\operatorname{sen} \frac{2}{n} - \operatorname{sen} \frac{2}{n+1} = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{n^2+n} \cos \frac{2n+1}{n^2+n},$$

$$S_n = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen} \frac{2}{n+1}] \to \frac{\operatorname{sen} 2}{2} \qquad (n \to \infty).$$

§ 11 Condición de Cauchy. Serie de términos positivos.

> *TEOREMA 2 (Condición de Cauchy)*
>
> La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si, dado $\epsilon > 0$ cualquiera existe un número natural N tal que $n \geq N$ implica
>
> $$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \quad \textit{para todo } p = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

Demostración

Sea $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, por la condición de Cauchy (propiedad 20) *la sucesión* $\{S_n\}$ *converge si y solo si, dado* $\epsilon > 0$ *cualquiera existe* N *tal que* $n \geq N$ *implica*

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon \qquad \textit{para todo } p = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

Pero como:

$$S_{n+p} - S_n = (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) - (a_1 + \cdots + a_n)$$

$$= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$$

entonces se tiene la condición (1).

EJEMPLO 21.

i) *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$\frac{1}{N} < \epsilon \ \left(\textit{ya que } \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)\right),$$

si $n \geqslant N$ *tenemos:*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}$$

$$\leqslant \frac{1}{N+1} < \epsilon \quad (\textit{para todo } p),$$

por lo tanto la serie satisface la condición de Cauchy. (En el ejemplo 18, hemos visto que la serie converge a 1.)

ii) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. *Para cualquier* N, *aunque sea muy grande, existe* m *tal que* $n = 2^m > N$. *Tomemos* $p = 2^m$ *entonces*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^m+2^m}$$

$$> \frac{2^m}{2^m+2^m} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, para $\epsilon < 1/2$ *__no__ __existe__* N *que satisface la condición (1), o sea que la serie diverge. (El ejemplo 13 nos muestra que esta serie diverge a* $+\infty$*!)* ■

En la condición de Cauchy, tomando $p = 1$ se tiene:

$$|a_{n+1}| < \epsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

esto es,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0,} \tag{3}$$

así, tenemos <u>una condición necesaria</u> para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente.

EJEMPLO 22.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ *diverge ya que* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ *diverge ya que* $\{(-1)^{n-1}\}$ *no converge.*

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge a pesar de que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *obsérvese que la condición (3) es apenas <u>necesaria</u> pero no suficiente.*

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$. $\lim_{n\to\infty} \log \frac{n+1}{n} = 0$ *pero la serie diverge ya que*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\log(k+1) - \log k\} = \log(n+1) \to \infty \quad (n\to\infty).$$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ *diverge ya que* $\{e^{in\theta}\}$ *no converge* $(\theta \neq 0)$.

vi) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge si* $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ *ya que*

$$a_n \to 0 \quad \textit{implica que} \quad \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1.$$

vii) Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *agregar, suprimir o modificar un número finito de términos no afecta la convergencia ó divergencia de la serie.*

Serie de términos positivos.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama de términos positivos si $a_n \geqslant 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. En tal caso, la sucesión $\{S_n\}$ *donde*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

es creciente ya que

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n ,$$

por el teorema de Weierstrass (propiedad 14) se tiene inmediatamente el siguiente teorema :

> *TEOREMA 3.*
>
> Una serie de términos positivos converge si y sólo si la sucesión de las sumas parciales es acotada.

Nótese que una serie de términos positivos *CONVERGE*, o *DIVERGE* a más infinito.

EJEMPLO 23.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} k$ *diverge ya que* $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *no es acotada.*

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ *converge ya que*

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n} < 1 \text{ es acotada.}$$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ *diverge a pesar de que* $\{S_n\}$ *es acotada (NO es de términos positivos.).* ●

Si dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son de términos positivos , y

$$a_n \leqslant b_n \quad \text{para todo} \quad n ,$$

entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$ ya que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant M \quad (\text{ para todo } n) \tag{4}$$

donde M es una cota de las sumas parciales de la serie $\sum b_n$. De la misma forma , la divergencia de la serie $\sum a_k$ implica la divergencia de la serie $\sum b_k$ puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty \quad \text{implica} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty .$$

EJEMPLO 24.

i) Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge a* 1*, pero como :*

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{para todo } n ,$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \qquad \text{converge.}$$

ii) Si $x \geqslant 0$ *tenemos la siguiente desigualdad :*

$$\log(1 + x) \leqslant x ,$$

entonces

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} .$$

Pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$$

diverge a $+\infty$ *ya que su suma parcial :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log \frac{k+1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{ \log(k+1) - \log k \}$$

$$= \log(n+1) \to \infty \ (n\to\infty).$$

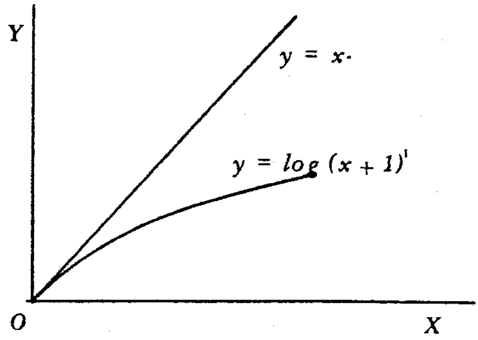


FIG. 18

Por lo tanto la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge* : ■

Generalizando este método obtenemos el siguiente teorema :

TEOREMA 4

Dadas dos series de términos positivos : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \quad (c \neq 0 \ , c \neq +\infty)$$

entonces las dos series convergen ó ambas divergen . Si $c = 0$ la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$, y la divergencia de $\sum a_n$ implica la divergencia de $\sum b_n$.

<u>*Demostración*</u> .

Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N ,$$

o sea :

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N .$$

Multiplicando por b_n *tenemos :*

$$(c - \epsilon)\, b_n < a_n < (c + \epsilon)\, b_n \quad . \tag{5}$$

Entonces ·

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} (c+\epsilon)\, b_n = (c+\epsilon) \sum_{n=N}^{\infty} b_n \qquad (6)$$

Esto es, la convergencia de la serie $\Sigma\, b_n$ *implica la convergencia de la serie* $\Sigma\, a_n$ *, y la divergencia de la serie* $\Sigma\, a_n$ *implica la divergencia de la serie* $\Sigma\, b_n$*. Nótese que en (6) las series comienzan en el N-ésimo término, esto no importa ya que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}) + \sum_{n=N}^{\infty} a_n ,$$

y un número finito de términos no afecta la convergencia o divergencia de la serie dada (Ejemplo 22 (vii)).

Además, si $c > 0$ *escogemos* $\epsilon < c$*, por ejemplo* $\epsilon = c/2$*, entonces tenemos:*

$$(c-\epsilon)\, b_n = \frac{c}{2}\, b_n < a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant N ,$$

por lo tanto la convergencia de la serie $\Sigma\, a_n$ *implica la convergencia de la serie* $\Sigma\, b_n$ *, y la divergencia de la serie* $\Sigma\, b_n$ *implica la divergencia de la serie* $\Sigma\, a_n$ *, o sea que las dos series convergen ó ambas divergen.*

EJEMPLO 25

i) Comparemos las dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} .$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \Big/ \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 ,$$

sabemos que la serie $\Sigma \frac{1}{n(n+1)}$ *converge, por lo tanto la primera serie también converge.*

ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ - $(\lambda < 1)$ *diverge ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \Big/ \left(\frac{1}{n^{\lambda}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\lambda}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\lambda}} = 0$$

y la serie $\Sigma \frac{1}{n}$ *diverge.*

iii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/3^n$ *converge ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{3^n}\right] \Big/ \left[\frac{1}{2^n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\,(2/3)^n = 0 ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \textit{converge}.$$

Pero, si comparamos $\Sigma\ n/3^n$ *con la serie* $\Sigma\ 1/3^n$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3^n}\right) \Big/ \left(\frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

así el teorema no sirve para ver la convergencia de la serie dada (hay que escoger adecuadamente la segunda serie.). ■

El teorema 4 es bastante poderoso para investigar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos si escogemos adecuadamente la segunda serie para comparar. Sinembargo no siempre existe el límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n / b_n$$

en tal caso, se puede generalizar en la siguiente forma:

> *TEOREMA 5.*
>
> Sean $\Sigma\ a_n$, $\Sigma\ b_n$ dos series de términos positivos, si
>
> $$\overline{\lim}\ \frac{a_n}{b_n} \neq +\infty \tag{7}$$
>
> entonces la convergencia de la serie $\Sigma\ b_n$ implica la convergencia de la serie $\Sigma\ a_n$. y si
>
> $$\underline{\lim}\ \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \tag{8}$$
>
> entonces la convergencia de $\Sigma\ a_n$ implica la convergencia de $\Sigma\ b_n$.

<u>Nota</u> Los lectores que no comprenden $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ pueden saltar este teorema 5!

<u>*Demostración*</u>

Si $\overline{\lim}\ a_n/b_n = U \neq \infty$, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N_1 *tal que*

$$\frac{a_n}{b_n} < U + \epsilon \qquad \textit{para todo } n \geq N_1 ,$$

o sea

$$a_n < (U + \epsilon)\, b_n . \tag{9}$$

Si $\underline{\lim}\ a_n/b_n = L > 0$, *entonces para* $\epsilon = L/2$ *existe* N_2 *tal que*

$$\frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} \qquad para\ todo \quad n \geqslant N_2 ,$$

o sea

$$a_n \geqslant (L/2)\, b_n . \blacksquare$$

EJEMPLO 26.

Sea $\quad a_{2n} = \dfrac{1}{(2n)^2}, \qquad a_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n},$

si $b_n = 1/n^2$ *entonces*

$$\overline{\lim}\ \frac{a_n}{b_n} = 1 , \quad \underline{\lim}\ \frac{a_n}{b_n} = 0 .$$

Como la serie $\Sigma(1/n^2)$ *converge, entonces la serie* $\Sigma\, a_n$ *también converge.* $\bullet$

Los símbolos O y o. $\oplus$

En los teoremas 4 y 5 hemos utilizado una comparación de dos sucesiones $\{a_n\},\{b_n\}$ de la forma ((5) y (9)):

$$a_n \leqslant M\, b_n \qquad (para\ n\ suficientemente\ grande)$$

donde M es una constante. (En (5) $M = c + \epsilon$, y en (9) $M = U + \epsilon$), lo que significa practicamente que '$\{a_n\}$ es más pequeño que $\{b_n\}$ salvo un factor constante', ó podríamos decir que 'la sucesión $\{a_n\}$ es <u>más pequeña</u> que la sucesión $\{b_n\}$ salvo un factor constante'. Más precisamente definimos como sigue :

> Dadas dos sucesiones $\{a_n\},\{b_n\}$ ($b_n > 0$ *para todo* n), si existen una constante M y un número natural N_0 tales que
>
> $$|a_n| \leqslant M\, b_n \qquad para\ todo \quad n \geqslant N_0 \tag{10}$$
>
> se nota :
>
> $$a_n = O(b_n) \qquad (cuando \quad n \to \infty) \tag{11}$$

Nótese que la condición (10) es equivalente a :

$$\overline{lim} \frac{|a_n|}{b_n} \neq +\infty .$$

Además, si $b_n \neq 0$ *(para todo n) sea*

$$M_o = \text{Máximo} \left\{ \frac{|a_1|}{b_1}, \frac{|a_2|}{b_2}, \ldots\ldots, \frac{|a_{N-1}|}{b_{N-1}}, M \right\},$$

de (10) tenemos:

$$|a_n| \leqslant M_o\, b_n \qquad \text{para todo } n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (12)$$

EJEMPLO 27.

i) $\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

ya que $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)}$ para todo n.

ii) $\text{sen } n = O(1)$

ya que $|\text{sen } n| \leqslant 1$ para todo n.

iii) $\log \frac{1}{n} = O(n)$

$$\text{ya que} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|\log(1/n)|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0 .$$

iv) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = O(1/\sqrt{n})$

$$\text{ya que} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} .$$

v) $\frac{1}{n^\lambda} = O(1/n \log n)$ si $\lambda > 1$

$$\text{ya que} \quad \lim_{n\to\infty} \left[\left[\frac{1}{n^\lambda}\right] \Big/ \left(\frac{1}{n \log n}\right) \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\log n}{n^{\lambda-1}} \right] = 0 .$$

vi) $\text{sen } \frac{x}{n} = O(1/n)$

$$\text{ya que} \quad \left| \text{sen } \frac{x}{n} \right| \leqslant \frac{|x|}{n} = |x| \frac{1}{n} . \ \blacksquare$$

Utilizando el símbolo O los teoremas 4 y 5 se pueden expresar

como sigue :

> Sean Σa_n y Σb_n dos series de términos positivos , si
>
> $$a_n = O(b_n)$$
>
> entonces la convergencia de la serie Σb_n implica la convergencia de la serie Σa_n .

Utilizando el símbolo O podemos evitar el cálculo fastidioso de las desigualdades , tratándolas mecánicamente como si trabajasemos con igualdades . Para lo cual veremos a continuación algunas propiedades del símbolo O .

> *TEOREMA 6*
>
> *i)* *Si* $a_n = O(b_n)$, $c_n = O(b_n)$ *entonces*
>
> $$\lambda a_n + \mu c_n = O(b_n) \quad (\lambda, \mu \text{ son constantes}) .$$
>
> *ii)* *Si* $a_n = O(b_n)$, $c_n = O(d_n)$ *entonces*
>
> $$a_n c_n = O(b_n d_n) .$$
>
> *iii)* *Si* $a_n = O(b_n)$, $b_n = O(c_n)$ *entonces*
>
> $$a_n = O(c_n) .$$

<u>*Demostración*</u> .

i) *Existen* M_1 , M_2 *tales que*

$$|a_n| \leqslant M_1 b_n \ , \quad |c_n| \leqslant M_2 b_n \quad \text{para todo } n ;$$

luego :

$$|a_n + c_n| \leqslant |a_n| + |c_n| \leqslant (M_1 + M_2)\, b_n .$$

ii) *Existen* M_1 , M_2 *tales que*

$$|a_n| \leqslant M_1 b_n \ , \quad |c_n| \leqslant M_2 d_n \quad \text{para todo } n ,$$

luego :

$$|a_n c_n| \leqslant (M_1 M_2)\, b_n d_n .$$

iii) *Existen* M_1 , M_2 *tales que*

$$|a_n| \leqslant M_1 \, b_n \, , \quad b_n \leqslant M_2 \, c_n \qquad \textit{para todo} \quad n \, .$$

luego

$$|a_n| \leqslant (M_1 M_2)\, c_n \, . \bullet$$

Son inmediatas las siguientes propiedades :

i) $O(\frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n})$,

$\lambda \, O(\frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n})$.

ii) $O(\frac{1}{n}) \, O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^3})$,

$\{ O(\frac{1}{n}) \}^k = O(\frac{1}{n^k})$.

iii) $O(\frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n})$

ya que $O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n})$.

iv) $\Sigma \, O(\frac{1}{n^2})$ *converge (Ejemplo 24)* ,

$\Sigma \, O(r^n)$ *converge si* $0 < r < 1$ *(Serie Geométrica)* . ∎

Nota Dadas dos sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ ($b_n > 0$ *para todo* n) , si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = 0 \qquad (13)$$

entonces se nota

$$\boxed{a_n = o(b_n)} \qquad \text{(o minúscla)} \, ,$$

por ejemplo , $\log n = o(n)$, $1/2^n = o(\frac{1}{n})$, $n/3^n = o(\frac{1}{2^n})$, *etc.* Para evitar la confusión entre dos símbolos o , O muchas veces decimos claramente '*O grande*' , '*o pequeño*'. En este libro , no utilizaremos el símbolo '*o pequeño*'. ∎

EJERCICIO 65

investigar la convergencia o divergencia de las siguientes series :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k / a^n \quad (a > 1)$ *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

Solución

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \Big/ \frac{1}{a^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(\sqrt{a})^n} = 0$,

luego la serie dada converge ya que $\Sigma\ 1/(\sqrt{a})^n$ converge $(\sqrt{a} > 1)$.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \Big/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$,

por lo tanto la serie dada diverge ya que $\Sigma \frac{1}{n}$ diverge.

EJERCICIO 67

Demostrar que la serie $\Sigma \frac{1}{n^k}$ converge si $k > 1$.

Solución.

$$\sum_{n=1}^{N} \left\{\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}}\right\} = 1 - \frac{1}{(N+1)^{k-1}} \to 1 \quad (N\to\infty)$$

Pero

$$\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} = \frac{(n+1)^{k-1} - n^{k-1}}{n^{k-1}(n+1)^{k-1}}$$

$$= \frac{(1+\frac{1}{n})^{k-1} - 1}{(n+1)^{k-1}} \geq \frac{(k-1)\frac{1}{n}}{(n+1)^{k-1}} = (k-1)\frac{1}{n(n+1)^{k-1}}$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^{k-1}}$$

converge, por lo tanto la serie dada también converge ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \Big/ \frac{1}{n(n+1)^{k-1}} = 1. \blacksquare$$

De este ejercicio y del ejercicio 24 ii) tenemos el siguiente resultado muy importante:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ converge si $\lambda > 1$, diverge si $\lambda \leq 1$.

EJERCICIO 68

Demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^a \ (\log n)^b}$ diverge si $a < 1$.

<u>Solución</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big/ \frac{1}{n^a (\log n)^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^b}{n^{1-a}} = 0 ,$$

luego la divergencia de $\sum \frac{1}{n}$ implica la divergencia de la serie dada.

EJERCICIO 69.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geqslant 0)$. una serie convergente, si

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

demostrar :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{r_n}$ diverge. ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ converge.

<u>Solución</u>.

i) Si $\{\frac{a_n}{r_n}\}$ no tiende a cero la serie diverge, por lo tanto supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} = 0 .$$

Comparemos la serie dada con la siguiente serie divergente:

$$\sum_1^{\infty} \log \frac{r_n}{r_{n+1}} = \sum_1^{\infty} (\log r_n - \log r_{n+1}) = \log r_1 - \lim_{n\to\infty} \left(\log r_{n+1}\right)$$
$$= +\infty ,$$

nótese que $r_n \to 0 \ (n\to\infty)$, $\log r_n \to -\infty \ (n\to\infty)$.

$$\frac{a_n}{r_n} \Big/ \log \frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{a_n}{r_n} \Big/ \left(- \log \frac{r_{n+1}}{r_n} \right)$$

$$= \frac{a_n}{r_n} \Big/ \left\{ - \log \frac{r_n - a_n}{r_n} \right\} = \frac{a_n}{r_n} \Big/ \left\{ - \log \left(1 - \frac{a_n}{r_n} \right) \right\} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1 .$$

ii) $$\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} = \sum \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n}}$$

$$= \sum \frac{(\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}})(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})}{\sqrt{r_n}} \leqslant \sum \frac{(\sqrt{r_n} + \sqrt{r_n})(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})}{\sqrt{r_n}}$$

$$= 2 \sum (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}) = 2(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_\infty}) \leqslant 2\sqrt{r_1} < +\infty ,$$

entonces la serie dada en ii) converge.

§ 12 Algunos criterios de convergencia

TEOREMA 7

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos, entonces

i) Si $\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *la serie converge.*

ii) Si $\underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *la serie diverge.*

iii) Si $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$ *la serie converge.*

iv) Si $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$ *la serie diverge.*

En el ejercicio 22, se ha visto la desigualdad:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} . \qquad (14)$$

iii) implica el criterio i), y iv) implica ii), por lo tanto basta demostrar iii) y iv). Si existe el límite: $\lim_{n\to\infty} \{ a_{n+1} / a_n \} = r$, *de i) y ii) tenemos el siguiente criterio de convergencia:*

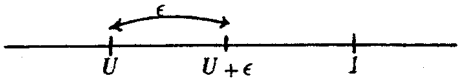
Sea $r = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$, entonces la serie $\sum a_n$ converge si $r < 1$, diverge si $r > 1$.

De la desigualdad (14), $\{ \sqrt[n]{a_n} \}$ puede converger aún en caso de que la sucesión $\{ a_{n+1} / a_n \}$ diverja:

Sea $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, la serie $\Sigma\, a_n$ converge si $\rho < 1$, diverge si $\rho > 1$.

Demostración del teorema 7.

Sea $U = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$.



Si $U < 1$ *dado* $\epsilon < 1 - U$ *existe* N *tal que*

FIG. 19

$$\sqrt[n]{a_n} < U + \epsilon \quad \textit{para todo } n \geqslant N ,$$

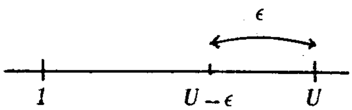
o sea

$$a_n < (U+\epsilon)^n .$$

Como $U + \epsilon < 1$ *entonces la serie* $\Sigma\,(U+\epsilon)^n$ *converge, por lo tanto la serie* $\Sigma\, a_n$ *converge.*

iv) Si $U > 1$, *dado* $\epsilon < U - 1$ *existe*

$$\{ n(1), n(2), \ldots, n(k), \ldots \}$$



tal que

$$\sqrt[n(k)]{a_{n(k)}} > U - \epsilon \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

FIG. 20

o sea

$$a_{n(k)} > (U-\epsilon)^{n(k)} > 1 .$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_{n(k)} = +\infty .$$

EJEMPLO 28

i) La serie geométrica $\Sigma\, a r^{n-1}$ $(r > 0)$ *converge si* $r < 1$, *diverge si* $r > 1$ *ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a r^n}{a r^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} r = r .$$

ii) La serie

$$\Sigma\, \frac{x^n}{n!} \qquad \textit{converge ya que}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1 .$$

iii) La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$
converge ya que

$$\lim_{n\to\infty} \{(\sqrt[n]{n} - 1)^n\}^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 1 - 1 = 0 < 1.$$

iv) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge ya que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$
$$= \frac{1}{e} < 1.$$

<u>NOTA</u> Al aplicar el segundo criterio tenemos:

Sea $y = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ entonces

$$\log y = \frac{1}{n}\{\log n! - \log n^n\}$$

$$= \frac{1}{n}\{\log\frac{1}{n} + \log\frac{2}{n} + \dots + \log\frac{n}{n}\} \underset{(n\to\infty)}{\rightarrow} \int_0^1 \log x\, dx = -1,$$

por consiguiente:

$$y = e^{\log y} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} e^{-1} < 1.$$

EJEMPLO 29

La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ;$$
$$a_{2n-1} = 1/2^n, \quad a_{2n} = 1/3^n,$$

es evidentemente convergente ya que es la suma de dos series geométricas convergentes. Pero:

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{1}{3^n} \Big/ \frac{1}{2^n} = (2/3)^n \to 0 \quad (n\to\infty);$$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{2^{n+1}} \Big/ \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}(3/2)^n \to +\infty \quad (n\to\infty)$$

entonces $\overline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, $\underline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$,

por lo tanto el primer criterio ((i), (ii)) no nos sirve .

Por otra parte

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = [\frac{1}{3^n}]^{1/2n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \to \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (n\to\infty)$$

$$\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left[\frac{1}{2^n}\right]^{\frac{1}{2n-1}} = [\frac{1}{2}]^{\frac{n}{2n-1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (n\to\infty)$$

entonces

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = 1/\sqrt{2}, \quad \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = 1/\sqrt{3} ,$$

por lo tanto podemos aplicar el segundo criterio ((iii)).

EJERCICIO 70.

Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda + 1 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^5 + \lambda^4 + \ldots \qquad (0 < \lambda < 1),$$

demostrar que la serie converge, pero que

$$\overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda} > 1 , \quad \underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda^3 < 1.$$

Solución

$$a_{2n} = \lambda^{2n-2} , \quad a_{2n-1} = \lambda^{2n-1}.$$

Sea S_n la suma parcial de los primeros n términos entonces tenemos:

$$S_n < \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} = \frac{1}{1-\lambda} < +\infty ,$$

luego, la serie converge.

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{\lambda^{2n-2}}{\lambda^{2n-1}} = \frac{1}{\lambda} , \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{\lambda^{2n+1}}{\lambda^{2n-2}} = \lambda^3$$

entonces

$$\overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda} > 1 , \quad \underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda^3 < 1.$$

EJEMPLO 30

i) $\Sigma \frac{1}{n}$ *diverge y* $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1}) \Big/ (\frac{1}{n}) = 1$.

ii) $\Sigma \frac{1}{n^2}$ *converge, y* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \Big/ \frac{1}{n^2} = 1$.

iii) *Sea* $\Sigma\, a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots$

evidentemente la serie diverge, y

$$\overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty\ ,\quad \underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0\ ,\quad \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.}$$

iv) *Sea* $\Sigma\, a_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^2} + \cdots$

$$(\ a_{2n-1} = 1/2^n\ ,\quad a_{2n} = 1/n^2\ )$$

evidentemente la serie converge. Pero:

$$\overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty\ ,\quad \underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0\ ,\quad \boxed{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = 1},\quad \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (ó $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$) el teorema 7 no sirve para determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Hay muchos criterios de convergencia para tales casos críticos, veremos algunos en los siguientes ejercicios. (Vease también en el ejercicio adicional el número 94.)

EJERCICIO 71.

Sea $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos.*

i) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1] < -1$ *entonces la serie converge,*

ii) *si* $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1] > -1$ *entonces la serie diverge.*

iii) *En caso de que* $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1) = -1$ *dar un ejemplo de serie*

divergente y otro de serie convergente.

<u>*Solución*</u>

(i) Sea $k > 0$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < -1-k < -1, \qquad (0 < k < 1)$$

para n *suficientemente grande se tiene que* $n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < -1-k$. *Como un número finito de términos no tiene importancia para la convergencia o divergencia de la serie, para mayor sencillez supongamos que:*

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < -1-k \qquad (\text{para todo } n),$$

o

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{1+k}{n} < \left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

En la desigualdad anterior, reemplazando $n = 2, 3, 4, \ldots, n$ *y multiplicando las* $(n-1)$ *desigualdades obtenidas miembro a miembro se tiene:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_2} < \frac{1}{n}\left(1-\frac{k}{2}\right)\left(1-\frac{k}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

luego:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n+1} < a_2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{k}{2}\right)\left(1-\frac{k}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

Pero:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{k}{2}\right)\left(1-\frac{k}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left\{\left(1-\frac{k}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right) - \left(1-\frac{k}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\left(1-\frac{k}{2}\right) < +\infty \qquad (\textit{serie telescópica}).$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\Big/\frac{1}{n+1} = 1$ *entonces la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{k}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

converge, por lo tanto la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n+1}$ *converge.*

ii) Razonando de manera similar al caso (i), supongamos que existe $1>k>0$ *tal que*

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) > -1+k \qquad (\textit{para todo } n),$$

o sea:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1-\frac{1-k}{n} > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Entonces:

$$\frac{a_{n+1}}{a_2} > \frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n-1}\,\cdots\,\frac{1}{2} = \frac{1}{n},$$

luego

$$\sum a_{n+1} > a_2 \sum \frac{1}{n} = +\infty,$$

por lo tanto la serie dada diverge.

(iii) *__Ejemplo 1.__*

Sea $a_n = \frac{1}{n}$, *entonces*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{n+1}\right) = -1,$$

y la serie $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ *diverge.*

__Ejemplo 2.__

Sea $a_n = \dfrac{1}{n(\log n)^2}$

entonces la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ *converge.* *__#Nota 1__*.

$$n\left[\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right] = n\left[\frac{n(\log n)^2}{(n+1)\{\log(n+1)\}^2}-1\right]$$

$$= n\,\frac{n(\log n)^2-(n+1)\{\log(n+1)\}^2}{(n+1)\{\log(n+1)\}^2} \to -1, \quad \text{\#\#}\underline{\textit{Nota 2}}$$

Nota 1 .

Comparándola con la serie telescópica convergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log (n+1)}\right\}$$

ya que $\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right\}\Big/\frac{1}{n(\log n)^2}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log n}{\log(n+1)} \cdot n\,\{\log(n+1) - \log n\}\right] = 1 .$$

Nota 2 .

$$\log(n+1) = \log n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 72.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, demostrar:

i) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{A}{n} + O(1/n^2)$, $A < -1$ entonces la serie converge.

ii) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{A}{n} + O(1/n^2)$, $A \geq -1$ entonces la serie diverge.

Solución

Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{A}{n} + O(1/n^2)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 - \frac{A}{n}\right\} = 0 .$$

Del ejercicio 71 tenemos que la serie converge si $A < -1$, diverge si $A > -1$. Por lo tanto, basta investigar el caso $A = -1$.

Sea

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O(1/n^2),$$

o sea $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n-1}{n}\,\{1 + O(1/n^2)\}$,

esto es :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n-1}{n}\,(1+C_n)$$

donde $\qquad |C_n| \leqslant \frac{M}{n^2} \qquad$ (para alguna constante M).

Sea N_o tal que

$$\sum_{n=N_o}^{\infty}\frac{M}{n^2} = b < 1 ,$$

entonces para todo $n \geqslant N_o$ tenemos :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n-1}{n}\left\{1-\frac{M}{n^2}\right\}.$$

Reemplazando $n = N_o, N_o+1, \ldots, N_o+p-1$ y multiplicando las desigualdades obtenidas miembro a miembro se tiene:

$$\frac{a_{N_o+p}}{a_{N_o}} > \frac{N_o-1}{N_o+p-1}\left\{1-\frac{M}{N_o^2}\right\}\left\{1-\frac{M}{(N_o+1)^2}\right\}\cdots\left\{1-\frac{M}{(N_o+p-1)^2}\right\}$$

$$> \frac{N_o-1}{N_o+p-1}\left[1-\left\{\frac{M}{N_o^2}+\frac{M}{(N_o+1)^2}+\cdots+\frac{M}{(N_o+p-1)^2}\right\}\right] \quad \text{* Nota}$$

$$> \frac{N_o-1}{N_o+p-1}\,(1-b).$$

Entonces :

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{N_o+p} > a_{N_o}(N_o-1)(1-b)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{N_o+p-1} = +\infty ,$$

por lo tanto , la serie diverge.

* Nota.

Si $b_k < 1$ se tiene por inducción la siguiente desigualdad:

$$(1-b_1)(1-b_2)\ldots(1-b_p) > 1-\{b_1+b_2+\ldots+b_p\}. \bullet$$

EJERCICIO 73.

Investigar la convergencia o divergencia de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{a}{n}\right| \qquad (a\neq 0).$$

Solución

Sea

$$a_n = \left|\binom{a}{n}\right| = \frac{|a(a-1)\ldots(a-n+1)|}{n!}$$

entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|a-n|}{n+1} = \frac{n-a}{n+1} = 1 - \frac{a+1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{a+1}{n(n+1)} = 1 - \frac{a+1}{n} + O(1/n^2).$$

Aplicando el ejercicio 72 se tiene :

la serie converge si $a > 0$, diverge si $a \leqslant 0$. ■

§ 13. Serie alternada

Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \qquad (15)$$

$$(\, a_n > 0 \quad \textit{para todo} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \,)$$

se llama serie alternada .

> *TEOREMA 8.*
>
> Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente que tiende a cero , entonces la serie alternada :
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$$
>
> converge .

Demostración.

Sea S_n la suma parcial de los primeros n términos, entonces :

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$= a_1 - \{(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}\}$$

$$\leqslant a_1 \qquad (\textit{ ya que } \{a_k\} \textit{ es decreciente, } a_k - a_{k+1} \geqslant 0\,)$$

Además

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geqslant S_{2n}$$

entonces la sucesión $\{S_{2n}\}$ *es creciente y acotada, luego existe el límite:*

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

También:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S$$

entonces $\{S_n\}$ *converge a* S. ●

EJEMPLO 31

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots$ *converge.*

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \dots$ *converge.*

5) *ya que* $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{\log(n+2)}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0.$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$ *converge.*

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ *converge ya que:*

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{(n+1)} = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2n(n+1)} \cdot \cos \frac{2n+1}{2n(n+1)} > 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 0.$$

EJEMPLO 32.

Demostrar que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *diverge si*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Solución.

$$a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

entonces

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} +\infty$$

Nótese que en este ejemplo, evidentemente

$$a_n > 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

sinembargo la sucesión $\{a_n\}$ *no es decreciente.* ■

EJERCICIO 74

Demostrar que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *diverge si*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}} .$$

Sugerencia.

Método similar al ejemplo 32. ●

§ 14 Convergencia absoluta

> TEOREMA 9 (Convergencia absoluta)
>
> Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Demostración.

Apliquemos la condición de Cauchy (Teorema 2)

Si la serie $\sum |a_n|$ *converge, dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$n \geq N \text{ implica } |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \epsilon \text{ (para todo } p)$$

entonces tenemos:

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \epsilon \quad \text{(para todo } p),$$

o sea que la serie $\Sigma\, a_n$ satisface la condición de Cauchy .

Otra demostración .

Sean

$$p_n = |a_n| + a_n \ , \quad q_n = |a_n| - a_n$$

entonces

$$0 \leqslant p_n \leqslant 2|a_n| \ , \quad 0 \leqslant q_n \leqslant 2\,|a_n| \ ,$$

por lo tanto , las dos series de términos positivos $\Sigma\, p_n$, $\Sigma\, q_n$ convergen. Pero como $a_n = \frac{1}{2}(p_n - q_n)$ entonces del teorema 1 la serie $\Sigma\, a_n$ converge . ■

Dada una serie $\Sigma\, a_n$, si $\Sigma\, |a_n|$ converge , se dice que $\Sigma\, a_n$ converge absolutamente .

El teorema 9 puede espresarse como sigue :

La convergencia absoluta implica la convergencia .

EJEMPLO 33

i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ converge absolutamente ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{converge.}$$

ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ converge (Teorema 8) pero no converge absolutamente . ●

Si una serie converge pero *NO* absolutamente , se dice que la serie converge condicionalmente .

Por ejemplo , las siguientes series convergen condicionalmente :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

EJERCICIO 75.

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie convergente absolutamente, demostrar que las siguientes series convergen absolutamente :

i) $\Sigma\, a_n^2$ *ii)* $\Sigma \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ $(a_n \neq -1)$ *iii)* $\Sigma \dfrac{a_n^2}{1 + a_n^2}$

Solución

i) $\sum_{n=1}^{N} |a_n^2| \leqslant \sum_{n=1} |a_n| \sum_{n=1}^{N} |a_n|$.

ii) *Se tiene que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *ya que* $\sum a_n$ *converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{1+a_n}\right| \Big/ |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1+a_n|} = 1 ,$$

por lo tanto, la serie $\sum |a_n/(1+a_n)|$ *converge.*

iii) *De i) y ii) se tiene que la serie* $\sum \dfrac{a_n^2}{1+a_n^2}$ *converge.*

EJERCICIO 76

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie convergente condicionalmente. Si* $\{p_n\}, \{q_n\}$ *son subsucesiones de* $\{a_n\}$ *formadas por todos los elementos positivos y por todos los elementos negativos respectivamente, demostrar que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\infty .$$

Solución.

Sea $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ *entonces* $\{S_n\}$ *es acotada, o sea que existe* M *tal que*

$$|S_n| \leqslant M \qquad \text{para todo } n.$$

Dado n, *existe algún* m *tal que*

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n + p_1 + \dots + p_{m-n} = a_1 + a_2 + \dots + a_m = S_m ,$$

o sea,

$$|q_1| + |q_2| + \dots + |q_n| \leqslant p_1 + \dots + p_{m-n} + M .$$

Esta desigualdad nos indica que si $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *converge entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |q_n|$ *también converge. Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *también converge ya que:*

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_N| = p_1 + p_2 + \dots + p_j + |q_1| + |q_2| + \dots + |q_{N-j}|$$

(para algún j)

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty .$$

Pero, según nuestra hipótesis de la <u>*convergencia condicional*</u>, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverge, por lo tanto, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *debe diverger.*

De la misma forma, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *diverge.* ●

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

converge condicionalmente, y

$$\sum p_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty ,$$

$$\sum q_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots = -\infty . \quad ■$$

EJERCICIO 77.

Sea

$$a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\text{sen } t}{t}\, dt ,$$

demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge condicionalmente.*

<u>*Solución*</u>.

i)

$$a_{2n-1} - a_{2n} = \int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{\text{sen } t}{t}\, dt + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\text{sen } t}{t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } x}{x + (2n-2)\pi}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } x}{x + (2n-1)\pi}\, dx$$

$$< \frac{\int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx}{(2n-2)\pi} - \frac{\int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx}{2n\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{\pi n(n-1)} .$$

También:

$$a_{2n-1} - a_{2n} = \int_0^{\pi} \text{sen } x \left\{ \frac{1}{x + (2n-2)\pi} - \frac{1}{x + (2n-1)\pi} \right\} dx > 0 ,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{2N} a_n = \sum_{k=1}^{N} (a_{2k-1} + a_{2k}) \quad \textit{converge cuando } N \to \infty ,$$

además :

$$|a_n| \sim \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} dt < \frac{1}{(n-1)\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \, dt \to 0 \quad (n \to \infty)$$

entonces la serie $\sum a_n$ *converge .*

ii) $$|a_n| = \left| \int_0^{\pi} \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} x}{x + (n-1)\pi} dx \right|$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x + (n-1)\pi} dx \geqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{n\pi} ,$$

luego

$$\sum |a_n| \geqslant \sum \frac{2}{n\pi} = \frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{n} = +\infty ,$$

por lo tanto , la convergencia de la serie es condicional . ●

§ 15 Comparación con la integral impropia

Sea $f(x)$ una función decreciente en $[1, \infty)$ (*ver Fig. 21*), la suma $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ es igual al área total de los primeros n rectángulos circunscritos a la curva $y = f(x)$, luego :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x) \geqslant \int_1^{n} f(x) \, dx \quad (16)$$

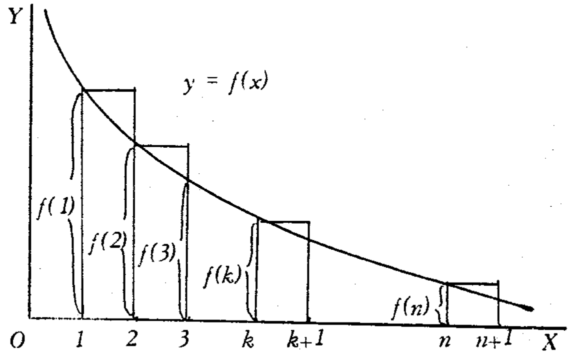


FIG. 21

También , de la Figura 22 se observa que

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(x) \, dx \quad (17)$$

De (16) y (17) , se nota que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si y sólo si la in-

tegral impropia

$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$

converge. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema:

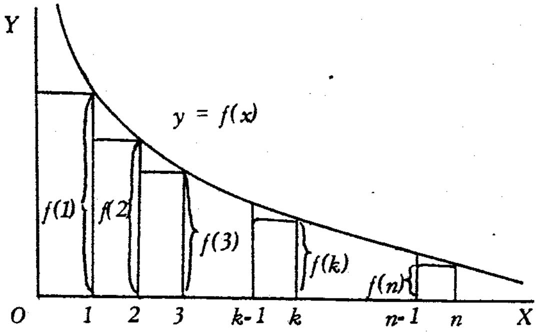


FIG. 22

TEOREMA 10

Sea f una función decreciente en $[1, \infty)$ tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Sean

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad T_n = \int_1^n f(x)\, dx, \quad d_n = S_n - T_n$$

entonces tenemos

(i) $0 < f(n+1) \leqslant d_{n+1} \leqslant d_n \leqslant f(1)$.

(ii) Existe el límite: $\lim_{n\to\infty} d_n = d$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si y solo si $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\, dx$ existe.

(iv) $0 \leqslant d_k - d \leqslant f(k)$ (para todo k)

Demostración.

(i) $d_n - d_{n+1} = (S_n - T_n) - (S_{n+1} - T_{n+1})$

$$= (S_n - S_{n+1}) - (T_n - T_{n+1}) = -f(n+1) + \int_n^{n+1} f(x)\, dx \tag{18}$$

$$= \int_n^{n+1} f(x)\, dx - \int_n^{n+1} f(n+1)\, dx \geqslant 0$$

ya que f es decreciente. Entonces $\{d_n\}$ es decreciente.

Como $d_1 = S_1 - T_1 = f(1) - 0 = f(1)$, entonces

$$d_n \leqslant f(1) \quad \text{para todo } n.$$

También,

$$d_{n+1} - f(n+1) = S_{n+1} - T_{n+1} - f(n+1) = S_n - T_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \{ f(k) - f(x) \}\,dx \geqslant 0 .$$

(ii) De (i), evidente. (iii) De (ii), evidente.

(iv) De (18):

$$d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1) \leqslant f(n) - f(n+1).$$

entonces

$$\sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \{ f(n) - f(n+1) \}$$

o sea

$$d_k - d \leqslant f(k) - 0$$

ya que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$. ■

Nótese que la desigualdad (iv) puede expresarse como:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx - d = O(f(n))$$

o sea

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + d + O(f(n)).} \qquad (19)$$

EJEMPLO 34

Investigar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ *ii)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^k}$.

Solución.

i) Comparándola con la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k}$ *, se ve que la serie converge si* $k > 1$, *diverge si* $k < 1$.

ii) *Comparemosla con la integral* $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^k}$:

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^k} = \int \frac{dt}{t^k} \quad (x = e^t)$$

$$= \begin{cases} t^{1-k}/(1-k) & (k < 1) \\ \log t & (k = 1) \\ -\frac{1}{k-1}\frac{1}{t^{k-1}} & (k > 1) \end{cases}$$

entonces la serie converge si $k > 1$, *diverge si* $k \leqslant 1$.

EJEMPLO 35.

Hallar la suma total de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Solución

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$,

entonces:

$$T_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n})$$

$$= S_{2n} - S_n = \{ \int_1^{2n} \frac{1}{x} dx + C + O(\frac{1}{2n}) \}$$

$$- \{ \int_1^{n} \frac{1}{x} dx + C + O(\frac{1}{n}) \}$$

$$= \{ \log 2n + C + O(\frac{1}{n}) \} - \{ \log n + C + O(\frac{1}{n}) \}$$

$$= \log \frac{2n}{n} + O(\frac{1}{n}) \to \log 2 \quad (n \to \infty)$$

donde $C = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx)$.

Por lo tanto:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2.}$$

NOTA

La constante :

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

se llama *CONSTANTE DE EULER* y su valor aproximado es :

$$C = 0.5772156 \ldots \quad \bullet$$

EJEMPLO 36

Investigar la convergencia o divergencia de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Solución

Sea

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x}\, dx + C + d_n \quad ,$$

$$|d_n| \leqslant \frac{1}{n} \qquad (\text{ por el teorema } 10,\ iv\ ).$$

Entonces :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \{\log n + C + d_n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n+1} + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{d_n}{n+1} \quad , \qquad (20)$$

las primeras dos series en (20) convergen condicionalmente ya que

$$\left\{\frac{\log n}{n+1}\right\} \quad , \quad \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$$

son decrecientes y tienden a cero, mientras que la última serie en (20) converge absolutamente puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{d_n}{n+1} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 < +\infty . \quad \blacksquare$$

Nota

Utilizando el símbolo O se puede proceder como sigue :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left\{\log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n+1} + C \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} O(\frac{1}{n^2}) ,$$

las primeras dos series alternadas convergen condicionalmente, mientras que la última converge absolutamente.

EJERCICIO 78

Sean p *y* q *dos números naturales,* $p \geqslant q \geqslant 1$, *sea*

$$x_n = \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k} ,$$

demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \log p/q .$$

<u>*Solución*</u>

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + O(\frac{1}{n}) ,$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{qn} \frac{1}{k}$$

$$= (\log pn + C + O(1/n)) - (\log qn + C + O(1/n))$$

$$= \log pn - \log qn + O(\frac{1}{n}) = \log \frac{p}{q} + O(\frac{1}{n}) \to \log \frac{p}{q} \quad (n\to\infty) . \bullet$$

<u>*Observación*</u>

Se puede demostrar el resultado deseado sin utilizar el teorema 10 como sigue:

$$x_n = \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{qn+(p-q)n}$$

$$= \frac{1}{n} [\frac{1}{q+\frac{1}{n}} + \frac{1}{q+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{q+\frac{(p-q)n}{n}}]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{(p-q)n} \frac{1}{q+(j/n)}$$

$$\xrightarrow[* \, (n\to\infty)]{} \int_0^{p-q} \frac{dt}{q+t} = \log(q+t) \Big|_0^{p-q} = \log \frac{p}{q} . \bullet$$

* *Nota* *Dada una función* $f(x)$ *continua en* $[0, 1]$, *se tiene:*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(j/n) . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 79 .

Hallar la suma total de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n-1} \right\} .$$

Solución

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n-1} \right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \ldots + (-1)^{N-1} \frac{1}{3N-2} + (-1)^{N} \frac{1}{3N-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{N}}{3N-1} + \frac{(-1)^{N+1}}{3N} \right)$$

$$- \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \ldots + \frac{(-1)^{N+1}}{3N} \right)$$

$$\xrightarrow[(N\to\infty)]{} \log 2 - \frac{1}{3} \log 2 = \frac{2}{3} \log 2 \quad (\text{Ejercicio } 35) . \bullet$$

EJERCICIO 80

Demostrar

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \log 2\sqrt{n} + \frac{C}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

donde C es la constante de Euler .

Solución

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \{ \log 2n + C + O(1/n) \} - \frac{1}{2} \{ \log n + C + O(1/n) \}$$

$$= \log 2n - \frac{1}{2} \log n + \frac{C}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \log 2\sqrt{n} + \frac{C}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) . \bullet$$

EJERCICIO 81

Demostrar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)n} = 2 \log 2 - 1$$

Sugerencia

$$\frac{1}{(4n^2 - 1)\, n} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{2n + 1},$$

aplicar el ejercicio 80 y

$$\sum_1^n \frac{1}{k} = \log n + C + O(1/n).$$

EJERCICIO 82

Demostrar las fórmulas siguientes:

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} = \frac{1}{2}(\log n)^2 + A + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ (A = constante.)

ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k} = \log(\log n) + B + O\left(\frac{1}{n \log n}\right)$ (B = constante)

Sugerencia

Aplicar el teorema 10 para

i) $f(x) = \log x/x$, ii) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\log(x+1)}$.

Hay que demostrar que las funciones empleadas son decrecientes.

EJERCICIO 83

Demostrar:

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{a}{k}\right) = a \log n + D + O(1/n)$ ($a > 0$, D = constante.)

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a)(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n})}{n^a} = L$ existe y $L \neq 0$.

Solución

i) Del teorema 10:

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{a}{k}\right) = \int_1^n \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) dx + C + O\left(\log\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right)$$

$$= (n+a)\log(n+a) - n\log n - (a+1)\log(a+1) + C + O(\log(1+\tfrac{a}{n})).$$

Pero,

$$O(\log(1+\tfrac{a}{n})) = O(1/n)\,,\ ^{*}\ \underline{Nota}$$

$$(n+a)\log(n+a) = (n+a)\log n(1+\tfrac{a}{n})$$

$$= (n+a)\log n + (n+a)\log(1+\tfrac{a}{n})$$

$$= (n+a)\log n + (n+a)\{\tfrac{a}{n} + O(\tfrac{1}{n^2})\},$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \log(1+\tfrac{a}{k}) = a\log n + \{a - (a+1)\log(a+1) + C\} + O(1/n)$$

$$= a\log n + D + O(1/n)$$

donde

$$D = a - (a+1)\log(a+1) + C.$$

ii) Tomar logarítmo de la relación en (i) $(L = e^{D} \neq 0)$. ■

* *Nota*

$$\log(x+1) \leq x \qquad si \quad x > 0. \bullet$$

§ 16 Criterios de Dirichlet y de Abel

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, sea

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n\,, \quad A_o = 0$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1})\, b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=o}^{n-1} A_k b_{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_o b_1 \quad (A_o = 0) \quad (21)$$

Utilizando la fórmula (21) tenemos el siguiente teorema :

> *TEOREMA 11* (Criterio de Dirichlet)
>
> Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que
>
> *i)* $\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \dots + a_n\}$ es acotada.
>
> *ii)* $\{b_n\}$ es decreciente y tiende a cero,
>
> entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Demostración

En (21), $A_n b_n \to 0$ $(n\to\infty)$. También:

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k (b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=1}^{n-1} |A_k| (b_k - b_{k+1})$$

$$\leqslant M \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) < M b_1 ,$$

por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ *converge absolutamente.* ■

EJEMPLO 37

Demostrar que las siguientes series convergen:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$ *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx \quad (x \neq 0)$.

Solución

Del ejemplo 20, las sucesiones:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right\} \ (x \neq 0) , \quad \left\{ \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx \right\}$$

son acotadas, entonces el criterio de Dirichlet nos garantiza inmediatamente que las dos series i) y ii) convergen. ●

NOTA

La convergencia de las dos series i) y ii) es condicional salvo algunos casos excepcionales.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos^2 nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}^2 nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos^2 nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}^2 nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 2x \quad \begin{pmatrix} \text{converge} \\ \text{si } x \neq 0, \pi. \end{pmatrix}$$

entonces las dos series $\sum \frac{1}{n} \cos^2 nx$, $\sum \frac{1}{n} \operatorname{sen}^2 nx$ divergen si $x \neq 0, \pi$.
Pero como :

$$\sum \frac{1}{n} \cos^2 nx \leqslant \sum \frac{1}{n} |\cos nx|$$

$$\sum \frac{1}{n} \operatorname{sen}^2 nx \leqslant \sum \frac{1}{n} |\operatorname{sen} nx|$$

entonces las dos series $\sum \left|\frac{1}{n} \operatorname{sen} nx\right|$, $\sum \left|\frac{1}{n} \cos nx\right|$ divergen si $x \neq 0, \pi$. ●

EJEMPLO 38.

Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n$ también diverge.

Solución.

Suponemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n$ converge, entonces la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n} k\, a_k\}$ es acotada. Por el criterio de Dirichlet la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n\, a_n)$$

converge (absurdo !). ■

EJEMPLO 39 (Criterio de Abel)

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesioncs tales que

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge,

ii) $\{b_n\}$ es decreciente , $b_n \geqslant 0$,

demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Solución.

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$,

en (21) tenemos :

$$A_n\, b_n \to A\, b \quad (n \to \infty).$$

Con un razonamiento idéntico al del teorema 11, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_k\, (b_k - b_{k+1})$

converge absolutamente ya que $\{A_n\}$ *es acotada* ($A_n \to A$ *implica que* $\{A_n\}$ *es acotada.*). ■

EJERCICIO 84

Investigar la convergencia o divergencia de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\text{sen } nx}{n}.$$

Solución

Sea

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + C + d_n$$

entonces (Teorema 10) :

$$|d_n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Tenemos :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\text{sen } nx}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \text{sen } nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n} \text{sen } nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n} \text{sen } nx,$$

las dos primeras series convergen de acuerdo con el teorema 11, mientras que la última serie converge absolutamente ya que

$$\sum \left|\frac{d_n}{n} \text{sen } nx\right| \leqslant \sum \frac{|\text{sen } nx|}{n^2} \leqslant \sum \frac{1}{n^2},$$

por lo tanto, la serie dada converge. ■

§ 17 Inserción en paréntisis

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, agrupando los términos y insertando los elementos de cada grupo en un paréntesis se obtiene una nueva serie. Por ejemplo, a partir de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

agrupando los términos dos en dos :

$$\underbrace{1 - 1}_{0} + \underbrace{1 - 1}_{0} + \underbrace{1 - 1}_{0} + \underbrace{1 - 1}_{0} +$$

se obtiene la serie $\Sigma\, 0 = 0 + 0 + 0 + \ldots$. Nótese que la serie original $\Sigma\,(-1)^{n-1}$ diverge mientras que la serie $\Sigma\, 0$ converge a cero.

En general, dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. insertamos los primeros $p(1)$ elementos en un paréntesis, sea b_1 su suma:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p(1)}$$

insertamos los $p(2)$ elementos siguientes en el segundo paréntesis, sea b_2 su suma:

$$b_2 = a_{p(1)+1} + a_{p(1)+2} + \ldots + a_{p(1)+p(2)}\,,$$

así sucesivamente, sea b_k la suma de $p(k)$ elementos del k-*ésimo* paréntesis:

$$b_k = a_{p(1)+\ldots+p(k-1)+1} + a_{p(1)+\ldots+p(k-1)+2} + \ldots + a_{p(1)+\ldots+p(k)}\ .$$

* * * * * * * * * * * * * *

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\left(a_1 + \ldots + a_{p(1)}\right)}_{b_1} + \underbrace{\left(a_{p(1)+1} + \ldots + a_{p(1)+p(2)}\right)}_{b_2} + \underbrace{\left(\ldots \ldots + a_{p(1)+\ldots+p(k-1)}\right)} + \underbrace{\left(a_{p(1)+\ldots+p(k-1)+1} + \ldots + a_{p(1)+\ldots+p(k)}\right)}_{b_k} + \ldots$$

FIG. 23

entonces así obtenemos una nueva serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ que depende de la serie original y de la sucesión de los números naturales $\{p(k)\}$. ($p(k)$ *es el número de elementos en el k-ésimo paréntesis.*)

> *TEOREMA 12*
>
> Si la serie $\sum_{1}^{\infty} a_n$ converge a S, la nueva serie $\Sigma\, b_n$ obtenida por la inserción en paréntesis también converge a S.

Demostración

Sea $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, *entonces dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$n \geqslant N \quad \textit{implica} \quad |S_n - S| < \epsilon . \tag{22}$$

Como $p(1) + p(2) + \dots + p(k) \to +\infty \ (k \to \infty)$, *existe* K *tal que*

$$p(1) + p(2) + \dots + p(K) \geq N \quad (\textit{ver Fig. } 24)$$

* * * * * * * * * * * * * * *

$$\overbrace{\underbrace{\overset{b_1}{\left(a_1+a_2+\cdots+a_{p(1)}\right)}}_{1} + \underbrace{\overset{b_2}{\left(\cdots\right)}}_{2} + \cdots + \underbrace{\overset{b_k}{\left(\cdots + \boxed{a_N} + \cdots + a_{p(1)+\cdots+p(k)}\right)}}_{k}}^{\approx S}$$

FIG. 24 $\quad p(1) + \dots + p(k) \geq N$ si $k \geq K$.

Sea $T_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$ *entonces*

$$T_k = \left(a_1 + \dots + a_{p(1)}\right) + \left(a_{p(1)+1} + \cdots\right) + \dots + \left(\cdots + a_{p(1)+p(2)+\cdots+p(k)}\right)$$

$$= S_{p(1)+p(2)+\cdots+p(k)} .$$

Si $k \geq K$ *entonces*

$$p(1) + \dots + p(k) \geq p(1) + \dots + p(K) \geq N ,$$

luego

$$| T_k - S | = \left| S_{p(1)+p(2)+\cdots+p(k)} - S \right| < \epsilon \qquad (\textit{por } (22)),$$

esto es,

$$T_k \to S \quad (k \to \infty). \quad \blacksquare$$

Según el ejemplo observado al principio de este numeral, la convergencia de la serie $\Sigma\, b_n$ no siempre implica la convergencia de la serie original $\Sigma\, a_n$. Sin embargo, bajo algunas condiciones, la convergencia de la serie $\Sigma\, b_n$ ya garantiza la convergencia de $\Sigma\, a_n$, como sigue:

TEOREMA 13 ⊕

Supongamos que i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *ii)* $\{p(k)\}$ *es acotada, entonces la convergencia de la serie* $\Sigma\, b_k$ *implica la convergencia de la serie original* $\Sigma\, a_k$.

Demostración

Sean

$$T_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k\,, \quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,.$$

Si $T_k \to T$ $(k \to \infty)$, *entonces dado* $\epsilon > 0$ *existe* K *tal que*

$$k \geq K \qquad \textit{implica} \qquad |T_k - T| < \epsilon/2\,. \tag{23}$$

Sea M *una cota de* $\{p(k)\}$, *o sea*

$$p(k) \leq M \qquad \textit{para todo } k = 1, 2, 3, \dots\,.$$

Como $a_n \to 0$, *existe* N (*escogemos* N *mayor que* $p(1)+p(2)+\cdots+p(K)$) *tal que*

$$n \geq N \qquad \textit{implica} \qquad |a_n| < \frac{\epsilon}{2M} \tag{24}$$

Si $n \geq N$, *existe* $k \geq K$ *tal que* (*ver Fig.* 25):

$$p(1)+p(2)+\dots+p(k) \leq n < p(1)+p(2)+\dots+p(k)+p(k+1)\,,$$

o sea

$$S_n = a_1 + \dots + a_{p(1)+\cdots+p(k)} + \dots + a_n$$

$$= \{b_1 + \dots + b_k\} + a_{p(1)+\cdots+p(k)+1} + \dots + a_n$$

$$= T_k + \left[a_{p(1)+\dots+p(k)+1} + \dots + a_n\right].$$

* * * * * * * * * * * * * * * * *

$$\overbrace{\underbrace{(a_1+a_2+\cdots)\cdot(+a_{p(1)+\cdots+p(k)})}_{b_1+\cdots\cdots+b_k}}^{\approx T} + \left|\overbrace{\underset{\substack{\wedge\\ \epsilon/2M}}{a_{p(1)+\cdots+p(k)+1}} + \cdots + \underset{\substack{\wedge\\ \epsilon/2M}}{a_n}}^{\text{a lo más } p(k+1)-1 \text{ términos}}\right|$$

FIG. 25 (Análisis de S_n *)*

Por lo tanto :

$$|S_n - T| = \left|T_k - T + \{a_{p(1)+\cdots+p(k)+1} + \cdots + a_n\}\right|$$

$$\leqslant \underbrace{|T_k - T|}_{\substack{\wedge \\ \epsilon/2}} + \underbrace{\left|a_{p(1)+\cdots+p(k)+1}\right|}_{\substack{\wedge \\ \epsilon/2M}} + \cdots + \underbrace{|a_n|}_{\substack{\wedge \\ \epsilon/2M}}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + M \times \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon \ ,$$

esto es,

$$S_n \to T \quad (n \to \infty) \ . \ \blacksquare$$

EJEMPLO 40

Sean $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, *en general*

$$a_k = \frac{1}{2^n} \quad si \quad 2^n \leqslant k \leqslant 2^n + 2^{n-1} - 1$$

$$a_k = -\frac{1}{2^n} \quad si \quad 2^n + 2^{n-1} \leqslant k \leqslant 2^{n+1} - 1$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge ya que*

$$\sum_{k=2^n}^{2^n+2^{n-1}-1} a_k = 2^{n-1} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \ ,$$

esto es, la serie NO satisface la condición de Cauchy ($2^n \to \infty , \frac{1}{2} \not\to 0$) .

Sea $p(k) = 2^{k-1}$, *entonces*

$$b_1 = a_1 = 1 \ , \quad b_2 = a_2 + a_3 = 0 \ ,$$

en general,

$$b_k = a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} = (2^{k-1} \times \frac{1}{2^k}) + 2^{k-1} \times (-\frac{1}{2^k}) = 0 \ ,$$

entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1 + 0 + \cdots$ *converge.*

Nótese que $\{p(k)\}$ *no es acotada.* ●

EJERCICIO 85

Sea $\Sigma\, a_n$ *una serie de términos positivos. Demostrar que si la serie* $\Sigma\, b_n$, *obtenida por la inserción en paréntesis, converge entonces la serie original converge.*

Sugerencia.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ *, entonces* T *es una cota de la suma parcial de la serie* $\sum a_n$. ∎

EJERCICIO 86

Sea $\sum a_n$ *una serie tal que* $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$. *Sea* S_n *la suma parcial de los primeros* n *términos de la serie, dado un número natural* q *si* S_{qn} *tiende al límite* S $(n\to\infty)$, *demostrar que la serie converge a* S.

Sugerencia.

Aplicar el teorema 13. ●

§ 18 Reordenación de una serie.

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cambiando el orden de la suma obtenemos una reordenación de la serie dada, es decir, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, formada por los elementos de $\sum_1^{\infty} a_n$, se llama una reordenación de $\sum_1^{\infty} a_n$ si cualquier término a_n aparece en algún puesto de $\sum_1^{\infty} b_n$ una y solo una vez. Esto es, b_n debe ser elemento de la serie original $\sum a_n$, sea

$$b_n = a_{s(n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{25}$$

Entonces para cualquier k natural, a_k aparecerá como un término de la serie $\sum b_n$, o sea que existe uno y sólo un número natural n tal que

$$k = s(n),$$

en este caso, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$$

es una reordenación de la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. * Nota

Por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots$$

es una reordenación de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\cdots \qquad \text{y.}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \\ 1 & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & +\frac{1}{4} + \cdots\cdots \end{array}$$

es una reordenación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, en cambio :

$$\begin{array}{cccccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \\ 2 & +\ 4 & +\ 3 & +\ 8 & +\ 5 & +\ 6 & +\ 7 & +\ 16 & +\ 9 & +\ 10 + \cdots\cdots \end{array}$$

<u>no</u> <u>es</u> una reordenación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ ya que el número 1 no aparece nunca en la serie .

* *<u>Nota</u> En términos matemáticos , sea 's' una* <u>biyección</u> *<u>de</u> <u>N</u> <u>sobre</u> <u>N</u> :*

$$n \longmapsto s(n) \quad ,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ *es* una reordenación *de la serie original* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ●

* * * * * * * * *

Dada una serie convergente , alguna reordenación puede tener la suma diferente , más aún , alguna reordenación puede diverger (ver Teorema 15, ejemplo 39 y Ejercicio 76), sin embargo tenemos el siguiente teorema para una serie convergente absolutamente :

> *TEOREMA 14*
>
> Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente , entonces cualquier reordenación converge también absolutamente , y la suma total es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se puede expresar el teorema 14 como sigue :

> Para una serie convergente absolutamente , el orden de la suma no tiene importancia .

Demostración .

Sean

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad , \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n \quad ,$$

entonces dado $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que* $n \geq N$ *implica*

$$\begin{aligned} &i) \quad |s_n - S| < \epsilon/2 \\ &ii) \quad \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \epsilon/2 \ . \end{aligned} \tag{26}$$

Nótese que i) *es la condición* : $S_n \to S$, y ii) *es la condición de Cauchy para la convergencia absoluta de la serie* $\Sigma\, a_n$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ *es una reordenación de la serie dada entonces existe* M *tal que*

$$\{1, 2, \dots , N\} \subset \{s(1), s(2), \dots , s(M)\} \qquad \text{\# \underline{Nota}}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

\# ***Nota*** . *Esto es, la suma parcial* $a_{s(1)} + a_{s(2)} + \dots + a_{s(M)}$ *contiene todos los términos* $a_1, a_2, \dots , a_N$, *lo cual es siempre posible para* M *suficientemente grande por ser una reordenación* . ●

* * * * * * * * * * * * * * * *

Sea $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_{s(k)}$, *entonces si* $n \geq M$ *tenemos* :

$$T_n = a_{s(1)} + \dots + a_{s(M)} + \dots + a_{s(n)}$$

$$= \underbrace{\{a_1 + a_2 + \dots + a_N\}}_{S_N} + \{\text{la suma de } n-N \text{ elementos de índices mayores que } N\}$$

luego :

$$|T_n - S| = |S_N - S + \{\text{la suma de } n\text{–}N \text{ elementos de índices mayores que } N\}|$$

$$\leq \underbrace{|S_N - S|}_{\text{por } (i)} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|}_{\text{por } (ii)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

esto es :

$$\lim_{n\to\infty} T_n = S .$$

La convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ *es evidente ya que*

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{s(n)}| < \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad \text{para todo } N. \quad \blacksquare$$

. . . .

Nota

Como $\{s(1), s(2), \ldots, s(n)\} \supset \{s(1), s(2), \ldots, s(M)\} \supset \{1, 2, \ldots, N\}$

entonces

$$\{s(1), s(2), \ldots, s(n)\} = \{1, 2, \ldots, N\} \cup \{j(1), j(2), \ldots, j(n-N)\}$$

donde $j(1), j(2), \ldots, j(n-N)$ *son números naturales mayores que* N.

Entonces

$$T_n = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=1}^{n-N} a_{j(k)}, \quad \sum_{k=1}^{n-N} |a_{j(k)}| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon/2. \quad \bullet$$

En cuanto a la serie convergente condicionalmente, el orden de la suma es muy importante como se muestra en el siguiente teorema :

> *TEOREMA 15* ⊕
>
> *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie* real *convergente condicionalmente, sean* b, c $(b \geqslant c)$ *dos números dados. Entonces existe una reordenación* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ *tal que*
>
> $$\overline{\lim} \sum_{k=1}^{n} a_{s(k)} = b, \quad \underline{\lim} \sum_{k=1}^{n} a_{s(k)} = c.$$

En especial, si $b = c$ *existe una reordenación cuya suma total es igual a* b. *Si* $b = c = \pm\infty$, *existe una reordenación que diverge a* $\pm\infty$.

Demostración.

Sean $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ *las subsucesiones de* $\{a_n\}$ *formadas por todos los elementos positivos y por los elementos negativos respectivamente, entonces (Ejercicio 76) :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\infty. \tag{27}$$

Además, la convergencia de la serie $\sum a_n$ *implica que* $a_n \to 0$, *o sea*

$$p_n \to 0\ ,\quad q_n \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{28}$$

De (27) *existe algún* n *tal que*

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n \geqslant b$$

sea $t(1)$ *el* *mínimo* *de tales* n. *De* (27) *existe algún número natural* n *tal que*

$$\left(p_1 + \dots + p_{t(1)}\right) + q_1 + q_2 + \dots + q_n < c\ ,$$

sea $u(1)$ *el* *número* *mínimo* *de tales* n, *o sea*

$$\left.\begin{aligned} \left(p_1 + \dots + p_{t(1)}\right) + q_1 + \dots + q_{u(1)-1} &\geqslant c \\ \left(p_1 + \dots + p_{t(1)}\right) + q_1 + \dots + q_{u(1)} &< c\ . \end{aligned}\right\}$$

Ahora existe algún número natural n *tal que*

$$\{p_1 + \dots + p_{t(1)}\} + \{q_1 + \dots + q_{u(1)}\} + p_{t(1)+1} + p_{t(1)+2} + \dots + p_n \geqslant b\ ,$$

sea $t(2)$ *el* *mínimo* *de tales* n (*ver Fig.* 26). *Existe algún número natural* n *tal que*

$$\{p_1 + \dots + p_{t(1)}\} + \{q_1 + \dots + q_{u(1)}\} + \{p_{t(1)+1} + \dots + p_{t(2)}\} + q_{u(1)+1} + \dots + q_n < c,$$

sea $u(2)$ *el mínimo de tales* n. *Así sucesivamente se obtienen dos suce-*

* * * * * * * * * * *

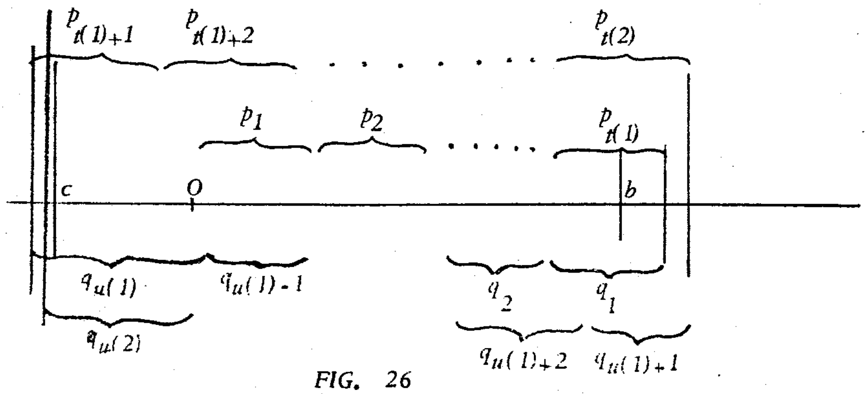


FIG. 26

ciones de números naturales $\{t(k)\}$, $\{u(k)\}$ *y la serie*

$$p_1+\cdots+p_{t(1)}+q_1+\cdots+q_{u(1)}+p_{t(1)+1}+\cdots+p_{t(2)}+q_{u(1)+1}+\cdots+q_{u(2)}+\cdots \tag{29}$$

es una reordenación de la serie dada $\Sigma\, a_n$. *Evidentemente el límite superior de la suma parcial de la serie* (29) *es* b *ya que* $p_n \to 0$, *y el límite inferior de la suma parcial de la serie* (29) *es* c *puesto que* $q_n \to 0$. ∎

EJEMPLO 41

Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\quad\cdots$

converge condicionalmente a $\log 2$. *Ahora encontremos una reordenación que diverja a* $+\infty$. *Consideremos :*

$$\underbrace{1}_{1}-\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}_{2}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}}_{3}-\frac{1}{6}+\quad\cdots$$

en la cual el número de términos positivos que sigue al término negativo aumenta como 1, 2, 3, 4, ...

Sea T_n *la suma parcial hasta el n-ésimo término negativo :*

$$T_n = 1-\frac{1}{2}+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n-1)+1}+\frac{1}{n(n-1)+3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)-1}\right\}-\frac{1}{2n}$$

entonces :

$$T_n = \left\{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}-\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right\}$$

$$= \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}-\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right\}$$

$$= \log n(n+1) + C - \frac{1}{2}\left[\log\frac{n(n+1)}{2}+C\right]-\frac{1}{2}(\log n + C) + O(1/n)$$

$$= \log\sqrt{n+1}+\log\sqrt{2}+O(1/n) \to +\infty \ (n\to\infty).$$

Como T_n es la suma parcial cuyo último elemento es negativo, entonces la reordenación considerada diverge a más infinito. ●

EJERCICIO 87

Hallar la suma total de las siguientes reordenaciones de la serie

$$\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{1}{n}\ :$$

i) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots$

ii) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots\ldots$

Sugerencia.

i) $S_{3n}=1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2n}$

$=\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{4n}\}-\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n}\}-\{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\}$

$=(\log 4n+C)-\frac{1}{2}(\log 2n+C)-\frac{1}{2}(\log n+C)+O(1/n)$

$=\log\frac{4}{\sqrt{2}}+O(1/n)\ \to\ \log 4-\log\sqrt{2}\quad(n\to\infty).$

ii) $S_{3n}=\{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\}-\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{4n}\}$

$=\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\}-\{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\}-\{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{4n}\}$

$=\log\sqrt{2}+O(1/n)\ \to\ \log\sqrt{2}\quad(n\to\infty).$ ●

EJERCICIO 88 ⊕

Dada una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ una reordenación (es decir, $s(n)$ es una BIYECCION de N sobre N). Sea

$$r(n)=|s(n)-n|\ \sup_{k\geq n}|a_k|,$$

si $r(n)\to 0$ $(n\to\infty)$, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$ converge y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

<u>*Solución*</u>

Dado $\epsilon > 0$ *existe* N_o *tal que*

$$n \geq N_o \quad \text{implica} \quad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - S \right| < \epsilon/2 \ , \quad r(n) < \epsilon/2 \ ,$$

donde S *es la suma total de la serie dada. Como* s *es una biyección de* N *sobre* N, *existe* m_o *tal que*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \{ s(1), s(2), \ldots, s(m_o) \} \supset \{ 1, 2, \ldots, N_o \} \\ &(ii) \quad s(m_o) \geq s(1), s(2), \ldots, s(N_o) . \end{aligned} \tag{30}$$

Dado $m \geq m_o$, *sea*

$$j = \text{Máxim} \, \{ s(1), s(2), \ldots, s(m) \}$$

entonces:

$$\{ 1, 2, \ldots, j \} \supset \{ s(1), s(2), \ldots, s(m) \} \supset \{ 1, 2, \ldots, N_o \} , \tag{31}$$

luego:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{s(k)} + \sum_{k>m}{}' a_{s(k)} = \sum_{k=1}^{j} a_k$$

donde Σ' *es la suma para todo* $k > m$ *tal que*

$$s(k) \in \{1, 2, \ldots, j\} - \{ s(1), s(2), \ldots, s(m) \} .$$

Pero:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k>m}{}' a_{s(k)} \right| &\leq \{ \text{el número de términos de } \Sigma' \} \sup_{k \geq m} |a_k| \\ &= (j - m) \sup_{k \geq m} |a_k| . \end{aligned} \tag{32}$$

Por otra parte, de (ii) (30) tenemos:

$$j = \text{Máx} \{ s(k) / k = 1, 2, \ldots, m \} = \text{Máx.} \{ s(k) / k = N_o, N_o+1, \ldots, m \}$$

entonces

$$j - m = s(k_o) - m \leq s(k_o) - k_o \tag{33}$$

donde k_o *es algún número entre* N_o *y* m.

De (32) *y* (33) *tenemos :*

$$\left| \sum_{k>m}' a_{s(k)} \right| \leqslant \{ s(k_o) - k_o \} \sup_{k \geqslant m} |a_k|$$

$$\leqslant \{ s(k_o) - k_o \} \sup_{k \geqslant k_o} |a_k| < \epsilon/2$$

ya que $k_o \geqslant N_o$. *Como* $j \geqslant N_o$, *entonces :*

$$\left| \sum_{k=1}^{j} a_k - S \right| < \epsilon/2 ,$$

luego :

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_{s(k)} - S \right| = \left| \sum_{k=1}^{j} a_k - \sum_{k>m}' a_{s(k)} - S \right|$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{j} a_k - S \right| + \left| \sum_{k>m}' a_{s(k)} \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Esto es :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{s(k)} = S . \blacksquare$$

EJERCICIO 89

Hallar una reordenación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ *que diverge a* $-\infty$.

Sugerencia

Similar al ejercicio 39.

$$\underbrace{1}_{①} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}}_{②} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{③} + \cdots\cdots$$

§ 19 Suma de Cesaro

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la suma total es un valor numérico determinado por el límite : $\lim_{n\to\infty} S_n$ donde $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ siempre y cuando el límite exista. Aún en el caso de la serie divergente sería conveniente asignar un valor numérico a la serie de acuerdo con alguna regla deter-

minada, pero tal regla debería producir la suma total en caso de que la serie sea convergente para que una serie no tenga dos valores numéricos asignados diferentes. Sumación de Césaro es una de tales reglas # para dar un valor numérico a la serie divergente (Consistencia de la sumación.).

Sea S_n la suma parcial de los primeros n términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} \qquad (n = 1, 2, \dots) \qquad (34)$$

Si $\{\sigma_n\}$ converge a un límite S, se dice que la serie es sumable en Césaro, S se llama la suma de Césaro y se nota :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad (C, 1).$$

EJEMPLO 42

i) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots ,$$

$$S_1 = 1, \; S_2 = 0, \; \dots, \; S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases},$$

$$\sigma_n = \frac{1 + 0 + 1 + 0 + \dots + 1 \; (\acute{o}\; 0)}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{(n+1)/2}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

entonces :

$$\sigma_n \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

o sea :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2} \qquad (C, 1).$$

ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\dots$$

* * * * * * * * * * * * * *

Nota

Hay muchos métodos de sumación de la serie divergente, Suma de Césaro, suma de Holder, suma de Borel, suma de LeRoy, suma de Riesz, etc.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{n} \left[n - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 1 \quad (n \to \infty).$$

En este caso, la serie es convergente y su suma total es 1, que es igual a la suma de Césaro. ■

En el ejercicio 23 hemos estudiado la siguiente desigualdad:

$$\underline{\lim}\ S_n \leqslant \underline{\lim}\ \sigma_n \leqslant \overline{\lim}\ \sigma_n \leqslant \overline{\lim}\ S_n \tag{35}$$

de donde tenemos la consistencia del método de Césaro :

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S, entonces es sumable en Césaro y la suma de Césaro es igual a S.

EJERCICIO 90

Demostrar que en cada uno de los siguientes casos la suma de Césaro es cero :

i) $1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - \ldots.$

ii) $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \ldots..$

iii) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots. \qquad (x \neq n\pi)$

Solución

i) $S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = -1,\ S_4 = 0,\ S_5 = 1, \ldots$

en general,

$$S_{4n+1} = 1,\ S_{4n+2} = 0,\ S_{4n+3} = -1,\ S_{4n+4} = 0.$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\{S_1 + S_2 + \ldots + S_n\} = \frac{1}{n}\{ 1 \text{ ó } 0 \} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ii) $S_1 = 1/2,\ S_2 = -1/2,\ S_3 = 0,\ S_4 = 1/2,\ S_5 = -1/2, \ldots$

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\left\{ 0 \ , \ ó \ \frac{1}{2} \right\} \ \to \ 0 \quad (n\to\infty).$$

iii) $$S_n = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos (2n-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} x} \ ,$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \ldots + \operatorname{sen} 2nx\} \frac{1}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{1}{2n \operatorname{sen} x} \ \frac{\operatorname{sen} nx \ \cos (n+1)x}{\operatorname{sen} x} \ \to 0 \quad (n\to\infty) \ .●$$

EJERCICIO 91

Hallar la suma de Césaro :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ n$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$ $(\ i = \sqrt{-1} \ )$

Solución

i) $S_1 = 1 \ , \ S_2 = -1 \ , \ S_3 = 2 \ , \ S_4 = -2 \ , \ S_5 = 3 \ , \ S_6 = -3 , \ldots$

$$\sigma_{2n} = \frac{1}{2n}\{1-1+2-2+3-3+\ldots+n-n\} = 0 \ ,$$

$$\sigma_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}\{1-1+2-2+\ldots+(n-1)-(n-1)+n\} = \frac{n}{2n-1} \ ,$$

luego $$\overline{\lim} \ \sigma_n = \frac{1}{2} \ , \ \underline{\lim} \ \sigma_n = 0 \ ,$$

esto es, la serie NO ES SUMABLE en Césaro.

ii) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}[1-e^{ik\theta}]$$

$$= \frac{1}{n}\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\left[n - \frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}}\right]$$

$$= \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} - \frac{1}{n}\left[\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right]^2 (1-e^{in\theta})$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \qquad (\text{si } \theta \neq 0)$$

o sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} = \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \qquad (C, 1). \blacksquare$$

EJERCICIO 92

Sea Σa_n una serie que diverge a $+\infty$ (ó $-\infty$), demostrar que la suma de Césaro también diverge a $+\infty$ (ó $-\infty$).

Solución

De la desigualdad (35), $\lim S_n = +\infty$ implica que $\lim \sigma_n = +\infty$. ●

EJERCICIO 93 ⊕

Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad (C, 1),$$

si $a_n = O(1/n)$ demostrar que la serie converge a S (Teorema de Hardy).

Solución (Por el método del absurdo)

Supongamos

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{n} \qquad (\text{para todo } n, \text{ para algún } M).$$

Si la serie NO converge a $S = \lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$ (donde $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$) entonces existe c (> 0) y una sucesión :

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots \qquad (n_k \to \infty)$$

tal que

$$|S_{n_k} - S| \geqslant c \qquad (\text{para todo } n_k).$$

Para mayor sencillez supongamos que $S_{n_k} - S \geqslant c$ entonces :

$$|S_{n_{k+j}} - S_{n_k}| = |a_{n_k+1} + \dots + a_{n_k+j}| \leqslant M \left[\frac{1}{n_k+1} + \dots + \frac{1}{n_k+j}\right]$$

$$< M \int_{n_k}^{n_k+j} (1/t)\, dt = M \log\left[1 + \frac{j}{n_k}\right]$$

Entonces, para todo j *tal que*

$$M \log\left[1+\frac{j}{n_k}\right] \leqslant \frac{c}{2} \tag{36}$$

se tiene :

$$S_{n_k+j} \geqslant S + \frac{c}{2}\ .$$

La desigualdad (36) implica que

$$\frac{n_k+j}{n_k} \leqslant e^{c/2M} \quad (=\lambda \quad \text{una constante})\ ,$$

o

$$n_k + j \leqslant [n_k\lambda] \qquad ([\quad] = \text{la parte entera de} \ldots)$$

Entonces :

$$\frac{S_1+S_2+\ldots+S_{[n_k\lambda]}}{[n_k\lambda]} = \frac{S_1+\ldots+S_{n_k}+S_{n_k+1}+\ldots+S_{[n_k\lambda]}}{[n_k\lambda]}$$

$$= \frac{S_1+\ldots+S_{n_k}}{n_k}\,\frac{n_k}{[n_k\lambda]} + \frac{S_{n_k+1}+\ldots+S_{[n_k\lambda]}}{[n_k\lambda]}\ ,$$

pero :

$$\frac{S_1+\ldots+S_{n_k}}{n_k}\,\frac{n_k}{[n_k\lambda]} \to S.\frac{1}{\lambda} \qquad (n_k\to\infty)\ ,$$

$$\frac{S_{n_k+1}+\ldots+S_{[n_k\lambda]}}{[n_k\lambda]} \geqslant \frac{([n_k\lambda]-n_k)(S+\frac{c}{2})}{[n_k\lambda]} \to \frac{\lambda-1}{\lambda}(S+\frac{c}{2})\ ,$$

por lo tanto :

$$\lim_{n_k\to\infty}\frac{S_1+\ldots+S_{[n_k\lambda]}}{[n_k\lambda]} \geqslant S\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda-1}{\lambda}(S+\frac{c}{2}) = S + \frac{\lambda-1}{\lambda}\,\frac{c}{2} > S\ ,$$

esto es imposible ya que el límite debe ser igual a S. ●

EJERCICIOS ADICIONALES (SERIES)

EJERCICIO 94

Investigar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{e^n}$ ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ $(p>0)$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

iv) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q}$ $(p > q > 0)$ v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n}$ $(p > q > 0)$

vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ $(a > 1,\ k > 0)$

viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-1/n}}$ ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+x)}$ x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \log(1+\frac{1}{n})}$

xi) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ xii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log \log n)^{\log \log n}}$

xiii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ $(p>0)$ xiv) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)(\log \log n)^p}$

xv) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a (\log n)^b}$ $(a, b>0)$ xvi) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$

xvii) $\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left[\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ xviii) $\sum_{n=1}^{\infty} \{\log(2n+2) - \log n\}^n$

xix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{n^n}$ xx) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\log n)$

xxi) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$ xxii) $\sum_{n=1}^{\infty} \{\log(1+\frac{1}{n})\}^p$ $(p > 0)$

xxiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}^q$ xxiv) $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \log(1+\frac{1}{n})$

Solución

i) Compararla con $\int_1^\infty \frac{x^k}{e^x}\,dx < +\infty$, ó con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \Big/ e^{n/2} \qquad \text{ya que}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^n} \Big/ \frac{1}{e^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(\sqrt{e})^n} = 0 .$$

ii) Compararla con la integral :

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(\log x)^p} = \int_{\log 2}^\infty \frac{e^t}{t^p}\,dt = +\infty \quad (\log x = t \ , \ dx = e^t\,dt).$$

iii) Compararla con la serie convergente : $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

iv) Compararla con la serie :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leqslant 1 \end{cases}$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \Big/ \frac{1}{n^p - n^q} = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 - \frac{n^q}{n^p} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{n^{p-q}} \right\} = 1 .$$

v) Compararla con la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \ , \end{cases}$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \Big/ \frac{1}{p^n - q^n} = \lim_{n\to\infty} \{ 1 - (q/p)^n \} = 1 .$$

vi) Compararla con la serie convergente $\sum \frac{1}{2^n}$ ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} \Big/ \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(3/2)^n} = 0 .$$

vii) Como $a > 1$ existe b tal que

$$a > b > 1 .$$

Compararla con la serie convergente $\sum_1^\infty \frac{1}{b^n}$ ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \Big/ \frac{1}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(a/b)^n} = 0 . \quad ((a/b) > 1 .)$$

viii) *Compararla con la serie convergente* $\sum \frac{1}{n^2}$ *ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \Big/ \frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

ix) *Compararla con la integral* $\int_1^\infty \frac{dx}{\log(1+x)} = \infty$, *ó compararla con la serie divergente* $\sum \frac{1}{n}$ *ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big/ \frac{1}{\log(1+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n)}{n} = 0 .$$

x) *Compararla con la serie :*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{a-1}} = \begin{cases} \text{converge si} & a > 2 \\ \text{diverge si} & a \leqslant 2 . \end{cases}$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a-1}} \Big/ \frac{1}{n^a \log(1+1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+1/n)}{1/n} = 1 .$$

xi) *Compararla con la integral :*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(\log x)^{\log x}} = \int_{\log 2}^\infty \frac{e^t}{t^t}\, dt \qquad (\log x = t \ , dx = e^t\, dt)$$

$$= \int_{\log 2}^\infty \left[\frac{e}{t}\right]^t dt = \int_{\log 2}^{e^2} \left[\frac{e}{t}\right]^t dt + \int_{e^2}^\infty \left[\frac{e}{t}\right]^t dt$$

$$\leqslant \int_{e^2}^\infty (1/e)^t\, dt + \int_{\log 2}^{e^2} (e/t)^t\, dt < +\infty .$$

xii) *Compararla con la integral :*

$$\int_3^\infty \frac{dx}{(\log\log x)^{\log\log x}} = \int_{\log\log 3}^\infty \frac{e^t \cdot e^{e^t}}{t^t}\, dt \qquad (\log\log x = t ,\ dx = e^t e^{e^t}\, dt .)$$

$$= \int_{\log\log 3}^\infty \left(\frac{e^{\{1+e^t/t\}}}{t}\right)^t dt = +\infty$$

ya que

$$\frac{e^{1+e^t/t}}{t} = \exp.\left\{1 + \frac{e^t}{t} - \log t\right\} \to +\infty \quad (t \to +\infty) .$$

xiii) *Compararla con la integral :*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^p} = \int_{\log 2}^\infty \frac{dt}{t^p} \qquad (\log x = t\ ,\quad dx/x = dt\ )$$

$$= \begin{cases} \text{convergente si } p > 1 \\ \text{divergente si } p \leqslant 1. \end{cases}$$

xiv) *Compararla con la integral:*

$$\int_3^\infty \frac{dx}{(x\log x)(\log\log x)^p} = \int_{\log\log 3}^\infty \frac{dt}{t^p} \qquad \left(\log\log x = t,\ \frac{dx}{x\log x} = dt \right)$$

$$= \begin{cases} \text{convergente si } p > 1 \\ \text{divergente si } p \leqslant 1. \end{cases}$$

xv) *Compararla con la integral:*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^a (\log x)^b} = \int_{\log 2}^\infty \frac{dt}{e^{(a-1)t}\, t^b} \qquad (\log x = t\ ,\quad dx = e^t\, dt)$$

$$= \begin{cases} \text{converge si } a > 1\ ,\ \text{ó } a = 1,\ b > 1\ , \\ \text{diverge si } a = 1,\ b \leqslant 1\ ,\ \text{ó } a < 1. \end{cases}$$

xvi) $\displaystyle\sum_1^\infty (\sqrt{1+n^2} - n) = \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n\{1+\sqrt{1+1/n^2}\}} = +\infty.$

(*Compararla con la serie divergente* $\sum \frac{1}{n}$.)

xvii) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty n^p \left\{ \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} = \sum_2^\infty \frac{n^p}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

$$= \sum_2^\infty \frac{n^p}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

compararla con la serie $\displaystyle\sum \frac{n^p}{(\sqrt{n})^3} = \sum 1/[\,n^{(3/2)-p}\,]$.

xviii) *Converge ya que*

$$\lim_{n\to\infty} [\{\log(2n+2) - \log n\}^n]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{2n+2}{n} = \log 2 < 1.$$

xix) *Converge ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1}\, \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

xx) *Diverge ya que* $\{\text{sen}\log n\}$ *no tiende a cero.*

xxi) *Diverge ya que* $(1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n\to\infty)$.

xxii)
$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1+O(1/n)\right),$$

$$\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^p = \frac{1}{n^p}\left(1+O(1/n)\right),$$

entonces la serie converge si $p > 1$, *diverge si* $p \leq 1$.

xxiii) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{n^{1/2}}\right)$

entonces
$$\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}^p = O\left(\frac{1}{n^{p/2}}\right),$$

por lo tanto, la serie converge si $p > 2$, *diverge si* $p \leq 2$.

xxiv) $\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

$$n^a\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^{1-a}} + O\left(\frac{1}{n^{2-a}}\right)$$

entonces la serie converge si $a < 0$, *diverge si* $a \geq 0$. ●

EJERCICIO 95

Investigar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\log n}$ ii) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log n}{n}$ v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\text{sen}\,\frac{a}{n}$

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$ ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)$ xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}$ $(a < 0)$.

xii) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \cdots$

xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$ xiv) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \log\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n} + 1\right\}$

xv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ donde $a_{2n-1} = \frac{2}{2n-1}$, $a_{2n} = \frac{1}{2n}$.

<u>Solución</u>

i) ——— vi) Convergente.

vii)
$$\operatorname{sen} \frac{a}{n} = \frac{a}{n} + O(1/n^3) ,$$

$$\sum (-1)^{n-1} \operatorname{sen}\frac{a}{n} = \sum (-1)^{n-1} \frac{a}{n} + \sum O(1/n^3) .$$

viii) Converge.

ix) Sea $a_n = \dfrac{1\cdot 3 \ \ldots \ (2n-1)}{2\cdot 4 \ \ldots \ 2n}$ entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \text{ , luego } \{a_n\} \text{ es decreciente.}$$

$$\frac{1}{a_n} = 2\frac{4}{3}\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1} = (1+1)(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\ldots(1+\frac{1}{2n-1})$$

$$> 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \to \infty \quad (n\to\infty) ,$$

entonces
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

x) $\operatorname{sen}(n\pi - \frac{1}{n}) = (-1)^{n-1} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$.

xi) $\binom{a}{n} = \dfrac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} = (-1)^n \dfrac{b(1+b)\ldots(n+b-1)}{n!}$

donde $b = -a > 0$.

Sea
$$a_n = \frac{b(1+b)\ldots(n+b-1)}{n!}$$

entonces
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+b}{n+1}$$

(A) Si $b \geq 1$ entonces $\{a_n\}$ es creciente, luego

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

y la serie diverge.

(B) Si $0 < b < 1$, entonces $\{a_n\}$ es decreciente. Además:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{n!}{b(b+1)\dots(b+n-1)} = \frac{1}{b}\,\frac{2}{b+1}\,\frac{3}{b+2}\cdots\frac{n}{b+n-1}$$

$$= \{1+\frac{1-b}{b}\}\{1+\frac{1-b}{b+1}\}\{1+\frac{1-b}{b+2}\}\dots\{1+\frac{1-b}{b+n-1}\}$$

$$> \frac{1-b}{b}+\frac{1-b}{b+1}+\frac{1-b}{b+2}+\dots+\frac{1-b}{b+n-1}$$

$$= (1-b)\{\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\dots+\frac{1}{b+n-1}\} \to \infty \quad (n\to\infty).$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, por lo tanto la serie converge.

xii) Converge. (Aplicar el criterio de Dirichlet) ó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

$$a_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\,, \quad a_{2n} = (-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

entonces

$$a_{2n-1} + a_{2n} = (-1)^{n-1}\{\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\}.$$

Como la sucesión $\{\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\}$ es decreciente y tiende a cero, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) \qquad \text{converge,}$$

por lo tanto, la serie $\sum_{1}^{\infty} a_n$ converge ya que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

xiii) Diverge ya que $\{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{n}})\}$ no tiende a cero.

xiv) $$\log\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} + 1\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(1/n^2),$$

$$\operatorname{sen}\{\log\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} + 1\right)\} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + O(1/n^2),$$

entonces la serie converge.

xv) $$a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{2n+1}{2n(2n-1)} \; ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = \sum^{\infty} \frac{2n+1}{2n(2n-1)} = +\infty \, ,$$

entonces la serie diverge. ●

EJERCICIO 96

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos, si para algún* k *, y para alguna sucesión positiva* $\{u_n\}$ *se tiene:*

$$u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} > k > 0 \quad (\textit{para todo } n \textit{ suficientemente grande}), \qquad (37)$$

demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.* (*Criterio de Kummer*)

Solución

Sea $\frac{1}{u_n} = b_n$ *, para mayor sencillez suponemos que*

$$\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} > k \quad (\textit{para todo } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ya que la convergencia o divergencia de la serie no se modifica al suprimir un número finito de términos. Entonces:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}} (1 + b_{n+1} k) \; .$$

Reemplazando $n = 1, 2, 3, \ldots, m-1$ *y multiplicando las desigualdades obtenidas miembro a miembro se tiene:*

$$\frac{a_1}{a_m} > \frac{b_1}{b_m} (1 + b_2 k)(1 + b_3 k) \ldots (1 + b_m k) ,$$

o sea

$$a_m < \frac{a_1}{b_1} \frac{b_m}{(1 + b_2 k) \ldots (1 + b_m k)}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{m=3}^{N} a_m < \frac{a_1}{b_1} \sum_{m=3}^{N} \frac{b_m}{(1 + b_2 k) \ldots (1 + b_m k)}$$

$$= \frac{a_1}{b_1} \frac{1}{k} \sum_{m=3}^{N} \left[\frac{1}{(1+b_2 k) \ldots (1+b_{m-1} k)} - \frac{1}{(1 + b_2 k) \ldots (1 + b_m k)} \right]$$

$$= \frac{a_1}{b_1 k} \left[\frac{1}{1+b_2 k} - \frac{1}{(1+b_2 k)\dots(1+b_N k)} \right] \quad (\textit{Serie teléscópica})$$

$$\leqslant \frac{a_1}{b_1 k} \, \frac{1}{1+b_2 k} < +\infty \, ,$$

luego la serie $\Sigma\, a_n$ *converge.*

<u>*NOTA:*</u>

(i) Si $u_n = 1$ *entonces la condición (37) es:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + k \quad (\textit{para } n \textit{ suficientemente grande}),$$

o sea

$$\overline{\lim} \; \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \, .$$

(ii) Si $u_n = n$, *la condición (37) es:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{n+1}{n} + \frac{k}{n} \, ,$$

o sea

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{k+1}{n} \quad (\textit{para } n \textit{ suficientemente grande}).$$

Aplicando este criterio, se obtiene inmediatamente el ejercicio 71 (i), ya que si

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) < -1 - k \qquad (k > 0)$$

entonces

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{n}{n-(k+1)} = 1 + \frac{k+1}{n-(k+1)} > 1 + \frac{k+1}{n} \, . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 97

Dada una serie alternada $\Sigma\, (-1)^{n-1} a_n$ $(a_n > 0)$, *suponemos que existe el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} n \left\{ \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right\} = A \, .$$

Demostrar:

i) Si $A < 0$ *la serie diverge.*

ii) Si $A > 0$ *la serie converge.*

iii) Si $A > 1$ *la serie converge absolutamente.*

Solución

i) $A < 0$. *Para mayor sencillez suponemos:*

$$n\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right\} < -k \qquad (0 < k < 1) \qquad \text{para todo } n,$$

entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n-k} > 1 .$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ *no tiende a cero, esto es, la serie dada diverge.*

ii) $A > 0$. *Para mayor sencillez suponemos:*

$$n\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right\} > k \qquad (0 < k < 1) \qquad \text{para todo } n,$$

entonces

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{k}{n} > 1 .$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ *es decreciente, además tenemos:*

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{k}{1}\right)\left(1+\frac{k}{2}\right) \ldots \left(1+\frac{k}{n}\right) > \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \ldots + \frac{k}{n},$$

luego:

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} \to +\infty \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

o sea, $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$, *entonces la serie* $\Sigma\, (-1)^{n-1} a_n$ *converge.*

iii) $A > 1$.

Aplicar el ejercicio 96 (criterio de Kummer), sabemos que la serie $\Sigma\, |(-1)^{n-1} a_n| = \Sigma\, a_n$ *converge.* ■

EJERCICIO 98

Dada una serie alternada $\Sigma\, (-1)^{n-1} a_n$ $(a_n > 0)$, *si*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\lambda}}\right) \qquad (\lambda > 1)$$

entonces la serie converge cuando $A > 0$, *diverge cuando* $A \leqslant 0$.

(Criterio de Weierstrass).

Solución.

Del ejercicio 97, basta investigar el caso $A = 0$.

Sea $$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + O(\frac{1}{n^\lambda}) \qquad (\lambda > 1) \quad .$$

entonces
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + O(\frac{1}{n^\lambda}) \ , \quad \text{\# Nota}$$

esto es,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + c_n \qquad \text{donde} \quad |c_n| \leqslant \frac{M}{n^\lambda} \qquad (\text{para algún } M) .$$

Como la serie $\Sigma \frac{1}{n^\lambda}$ converge, existe N_o tal que
$$\sum_{n=N_o}^{\infty} \frac{M}{n^\lambda} = b < 1 \ .$$

Entonces
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + c_n \geqslant 1 - \frac{M}{n^\lambda} \ ,$$

luego :
$$\frac{a_{N_o+p}}{a_{N_o}} \geqslant \{1 - \frac{M}{N_o^\lambda}\}\{1 - \frac{M}{(N_o+1)^\lambda}\} \ \ldots \ \{1 - \frac{M}{(N_o+p-1)^\lambda}\}$$
$$\geqslant 1 - [\frac{M}{N_o^\lambda} + \frac{M}{(N_o+1)^\lambda} + \ldots + \frac{M}{(N_o+p-1)^\lambda}] \quad \left(\begin{matrix}\text{Ejercicio 72} \\ \text{Nota *}\end{matrix}\right)$$
$$> 1 - b > 0 \ ,$$

esto es,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{p\to\infty} a_{N_o+p} \geqslant (1-b)\, a_{N_o} \neq 0 \ ,$$

por lo tanto la serie $\Sigma \ (-1)^{n-1} a_n$ diverge. ●

\# Nota Si $$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \Delta_n \ , \ |\Delta_n| \leqslant \frac{M}{n^\lambda} \qquad \text{entonces}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\Delta_n} = 1 - \frac{\Delta_n}{1+\Delta_n} \ ,$$
$$\left|\frac{\Delta_n}{1+\Delta_n}\right| \leqslant \frac{|\Delta_n|}{1-|\Delta_n|} \leqslant \frac{M/n^\lambda}{1 - M/n^\lambda} = O(\frac{1}{n^\lambda}) \ .$$
■

EJERCICIO 99

Sea Σa_n $(a_n > 0)$ divergente. Si $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ demostrar que

i) $\Sigma \dfrac{a_n}{1+a_n}$ diverge. ii) $\Sigma \dfrac{a_n}{S_n}$ diverge.

iii) $\Sigma \dfrac{a_n}{(S_n)^2}$ converge.

iv) ¿ Qué se puede decir acerca de la convergencia o divergencia de las series :

$$\Sigma \frac{a_n}{1+n a_n} \quad , \quad \Sigma \frac{a_n}{1+n^2 a_n} \quad ?$$

Solución

i) Si $\{ \dfrac{a_n}{1+a_n} \}$ no tiende a cero, la serie diverge, luego suponemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0 .$$

$$\frac{a_n}{1+a_n} \Big/ a_n = \frac{1}{1+a_n} = 1 - \frac{a_n}{1+a_n} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Por lo tanto, la divergencia de la serie Σa_n implica la divergencia de la serie $\Sigma a_n/(1+a_n)$.

ii) Si $\{a_n/S_n\}$ no converge a cero la serie diverge, luego suponemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0 .$$

Comparamos la serie $\Sigma a_n/S_n$ con la siguiente serie divergente:

$$\Sigma_2^{\infty} \log \frac{S_n}{S_{n-1}} = \Sigma_2^{\infty} (\log S_n - \log S_{n-1}) = \log S_\infty - \log S_1 = +\infty,$$

$$\frac{a_n}{S_n} \Big/ \log \frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{a_n}{S_n} \Big/ - \log \frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{a_n}{S_n} \Big/ - \log \frac{S_n - a_n}{S_n}$$

$$= \frac{a_n}{S_n} \Big/ - \log \left(1 - \frac{a_n}{S_n}\right) \to 1 \quad \left(\frac{a_n}{S_n} \to 0 \right),$$

entonces la serie diverge.

(iii) $\displaystyle\sum \frac{a_n}{(S_n)^2} = \sum \frac{S_n - S_{n-1}}{(S_n)^2}$.

Comparamos la serie con la siguiente serie convergente :

$$\sum_2^{\infty}\left[\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right] = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_\infty} = \frac{1}{S_1} ,$$

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{(S_n)^2} \Big/ \left[\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right] = \frac{S_n\, S_{n-1}}{(S_n)^2} = \frac{S_{n-1}}{S_n} \leqslant 1 ,$$

por lo tanto , la serie dada converge .

(iv) (A) $\displaystyle\sum \frac{a_n}{1 + n^2 a_n} \leqslant \sum \frac{a_n}{n^2 a_n} = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$, la serie converge .

(B) Ejemplo 1

$$a_n = \frac{1}{n} , \quad \sum a_n = \sum \frac{1}{n} \quad \text{diverge .}$$

$$\sum \frac{a_n}{1 + n\, a_n} = \sum \frac{1}{2n} \quad \text{diverge .}$$

Ejemplo 2

$$a_k = 1 \text{ si } k = n^2 \; (n = 1, 2, 3, \ldots) , \quad a_k = 0 \quad \text{si} \quad k \neq n^2$$

entonces

$$\sum_1^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty \quad (\text{diverge}),$$

$$\sum_k \frac{a_k}{1 + k\, a_k} = \sum_n \frac{1}{1 + n^2 \cdot 1} \leqslant \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \quad (\text{converge.}) \bullet$$

EJERCICIO 100

i) Sea $\sum a_n$ $(a_n > 0)$, una serie convergente , demostrar que la serie

$$\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}} \quad \text{converge .}$$

ii) Sea $\{a_n\}$ decreciente , $a_n > 0$. Si $\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$ converge , demostrar que la serie $\sum a_n$ converge .

Solución

i) $\sum_{n=1}^{N} \sqrt{a_n \; a_{n+1}} \leqslant \sqrt{\sum_1^N a_n} \; \sqrt{\sum_1^N a_{n+1}} < +\infty .$

(desigualdad de Cauchy - Schwartz)

ii) $\sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty \sqrt{a_n}\sqrt{a_n} \leqslant \sum_1^\infty \sqrt{a_{n-1}}\sqrt{a_n} = \sum_1^\infty \sqrt{a_{n-1}\, a_n} < +\infty$

ya que $a_{n-1} \geqslant a_n$. (considerar $a_o = a_1$) ■

EJERCICIO 101

Sea $\Sigma\, a_n$ ($a_n > 0$) una serie divergente, investigar la convergencia o divergencia de la serie $\Sigma\; a_n/(1+a_n^2)$.

Solución

(i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{1+a_n^2}\right) \Big/ a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n^2} = 1 \; ,$$

por lo tanto, la serie $\Sigma\; a_n/(1+a_n^2)$ diverge .

(ii) Suponemos que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Ejemplo 1

$$a_n = n^2 \; , \; \Sigma^\infty \; n^2 \quad \text{diverge a más infinito .}$$

$$\Sigma \frac{a_n}{1+(a_n)^2} = \Sigma \frac{n^2}{1+n^4} < \Sigma \frac{n^2}{n^4} = \Sigma \frac{1}{n^2} < +\infty \text{ (converge) .}$$

Ejemplo 2

$$a_n = n \; , \; \Sigma_1^\infty \; n \quad \text{diverge .}$$

$$\Sigma \frac{a_n}{1+(a_n)^2} = \Sigma \frac{n}{1+n^2} = +\infty \quad \text{(diverge) .}$$ ■

EJERCICIO 102

Sea $\sum_{n=1}^\infty (a_n)^2 = +\infty$, hallar una serie $\sum_{n=1}^\infty b_n$ tal que

$$\sum_{n=1}^\infty (b_n)^2 < +\infty \; , \; y \; \sum_{n=1}^\infty a_n\, b_n \quad \text{diverja .}$$

Solución

Sea
$$b_k = \frac{a_k}{\sum_{j=1}^{k} (a_j)^2}.$$

entonces:

$$\sum_1^N (b_k)^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{(a_k)^2}{\left(\sum_{j=1}^{k} (a_j)^2\right)^2} \leqslant \frac{1}{(a_1)^2} + \sum_{k=2}^{N} \frac{(a_k)^2}{\sum_{j=1}^{k-1} (a_j)^2 \sum_{j=1}^{k} (a_j)^2}$$

$$= \frac{1}{(a_1)^2} + \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{k-1} (a_j)^2} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} (a_j)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{(a_1)^2} + \frac{1}{(a_1)^2} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} (a_j)^2} < \frac{2}{(a_1)^2},$$

esto es, la serie $\sum_1^\infty (b_k)^2$ converge.

Ahora,
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k)^2}{\sum_{j=1}^{k} (a_j)^2} = +\infty.$$

(por el ejercicio 97 (ii).) ■

EJERCICIO 103.

Sea $\Sigma\, a_n$ $(a_n > 0)$ una serie convergente. Hallar una serie convergente $\Sigma\, b_n$ $(b_n > 0)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Solución

Sea
$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}}$$

entonces se tiene:

$$\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

Sean $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, $\delta_n = \sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}$ entonces

$$\frac{b_n}{\delta_n} = \frac{A_n - A_{n+1}}{\sqrt{A_n}\,(\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}})} = \frac{\sqrt{A_n} + \sqrt{A_{n+1}}}{\sqrt{A_n}} = 1 + \sqrt{\frac{A_{n+1}}{A_n}} < 2 ,$$

$$\sum_1^{\infty} \delta_n = \sum_1^{\infty} (\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}) = \sqrt{A_1} < +\infty ,$$

por lo tanto, la serie $\sum b_n$ converge. ●

EJERCICIO 104

Sea $a_n > 1$ para todo n. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log a_n}{n^2}$ converge, demostrar que la serie $\sum_1^{\infty} a_n \frac{\log n}{n^2}$ converge.

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\log n}{n^2} = \sum{}' \, a_n \frac{\log n}{n^2} + \sum{}'' \, a_n \frac{\log n}{n^2}$$

donde $\sum'$ es la suma para todo n tal que $\log n < 2 \log a_n$, $\sum''$ es la suma para todo n tal que $\log n \geqslant 2 \log a_n$. Entonces:

$$\sum{}' \, a_n \frac{\log n}{n^2} \leqslant \sum{}' \, 2 \frac{a_n \log a_n}{n^2} \leqslant 2 \sum_1^{\infty} \frac{a_n \log a_n}{n^2} < +\infty ,$$

$$\sum{}'' \, a_n \frac{\log n}{n^2} \leqslant \sum \frac{n^{1/2} \log n}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{3/2}} < +\infty ,$$

por lo tanto, la serie $\sum_1^{\infty} a_n \frac{\log n}{n^2}$ converge. ■

EJERCICIO 105

Sea $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ una serie convergente.

i) Si $\{a_n\}$ es monótona, demostrar que $n a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

ii) Dar un ejemplo en que $\{a_n\}$ no es monótona y $\lim_{n\to\infty} n a_n \neq 0$.

iii) Dar un ejemplo de la serie divergente $\sum b_n$ $(b_n > 0)$ tal que $n b_n \to 0$.

Solución

(i) Dado $\epsilon > 0$ existe n_o tal que si $n > n_o$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \epsilon/2 \qquad (para\ todo\ \ p\ ).$$

Tomando $p = n$ tenemos :

$$n\ a_{2n} = \sum_{k=n+1}^{n+n} a_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+n} a_k < \epsilon/2 \ ,$$

o sea

$$(2n)\ a_{2n} < \epsilon .$$

También :

$$(2n+1)\ a_{2n+1} \leqslant (2n+1)\ a_{2n} < a_{2n} + \epsilon .$$

Como $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} n\ a_n = 0$.

(ii) Sea
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{n} & \text{si } n = k^2 \text{ para algún } k \text{ natural ,} \\ a_n = \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \neq k^2 \text{ para todo } k \text{ natural ,} \end{cases}$$

entonces :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\neq k^2} \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \ ,$$

pero :

$$\overline{\lim}\ n\ a_n = \lim_{k\to\infty} k^2 \cdot \frac{1}{k^2} = 1 \neq 0 .$$

(iii) Sea $b_n = \dfrac{1}{n\log n}$, entonces $\sum \dfrac{1}{n\log n} = +\infty$, pero

$$n\ b_n = \frac{1}{\log n} \to 0 \quad (n\to\infty) . \ \bullet$$

EJERCICIO 106

Sea $\sum a_n$ una serie convergente ($a_n > 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$).
Demostrar que :

$$\underline{\lim}\ n\ a_n = 0 .$$

Solución

Suponemos que

$$\underline{\lim}\ n\ a_n = L > 0 .$$

Dado $\epsilon = L/2 > 0$ existe N_o tal que

$$n\, a_n > L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \quad para\ todo\ n \geq N_o \ ,$$

o sea

$$a_n > \left(\frac{L}{2}\right)\frac{1}{n} \quad para\ todo\ n \geq N_o .$$

Entonces :

$$\sum_{n=N_o}^{\infty} a_n > \frac{L}{2} \sum_{n=N_o}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \ ,$$

esto es , la serie $\Sigma\, a_n$ diverge (contradice a la hipótesis !) . ∎

EJERCICIO 107

Sea $a_n = \{ 1 - \frac{1}{n} \log n \}^n$, demostrar que la serie $\Sigma\, a_n$ diverge .

Solución

Sea
$$f(x) = \{ 1 - \frac{\log x}{x} \}^x \quad entonces$$

$$f'(x) = [1 - \frac{\log x}{x}]^x \left[\log \left(1 - \frac{\log x}{x}\right) + \frac{\log x - 1}{x\{ 1 - \frac{\log x}{x} \}} \right]$$

$$= [1 - \frac{\log x}{x}]^x \left[- (\frac{\log x}{x}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 - \ldots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right)\{ 1 + \frac{\log x}{x} + \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 + \ldots \} \right]$$

$$= [1 - \frac{\log x}{x}]^x [- \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 + \ldots \quad] \ ,$$

por lo tanto , $f'(x) < 0$ si x es suficientemente grande ya que

$$\lim_{x\to\infty} x\, \{(\log x)/x\}^2 = 0 \ .$$

Entonces $\{a_n\}$ es decreciente si n es suficientemente grande . Pero,

$$\log n\, a_n = \log n + n \log (1 - \frac{1}{n} \log n)$$

$$= \log n - n \{ \frac{\log n}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2 + \ldots \} \to 0 \ (n\to\infty) \ ,$$

esto es , $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\log n a_n} = e^0 = 1$.

Del ejercicio 105 , la serie $\Sigma\, a_n$ diverge.

NOTA :

Utilizando el ejercicio 106, basta demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 1 \quad \text{ya que} \quad \underline{\lim}\; n\, a_n \neq 0 . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 108

Si la serie $\Sigma\, a_n$ ($a_n > 0$) converge y $\{a_n\}$ es decreciente, demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) \qquad \text{converge} .$$

Solución

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} n\, a_n - \sum_{n=1}^{N} n\, a_{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n\, a_n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)\, a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n - N\, a_{N+1} .$$

Sabemos que $N\, a_N \to 0$ ya que $\{a_n\}$ es decreciente (Ejercicio 105) , entonces

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_n - a_{n+1}) \xrightarrow[N\to\infty]{} a_1 + \sum_{2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \quad \bullet$$

EJERCICIO 109

Demostrar que $\sum_{1}^{\infty} \log (n \operatorname{sen}\frac{1}{n})$ converge absolutamente.

Sugerencia

$$n \operatorname{sen}\frac{1}{n} = n\, \{\frac{1}{n} + O(1/n^3)\} = 1 + O(1/n^2) ,$$

$$\log (n \operatorname{sen}\frac{1}{n}) = \log (1 + O(\frac{1}{n^2})) = O(1/n^2) .$$

También , puede compararse con la serie convergente $\Sigma\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\log (n \operatorname{sen}\frac{1}{n})|}{1/n^2} = 6 . \quad \bullet$$

EJERCICIO 110

Sea $\Sigma\, a_n^2$ ($a_n > 0$) una serie convergente , demostrar que

i) $\Sigma\ (b_n)^2$ ii) $\Sigma\ a_n b_n$ *son convergentes donde*

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Solución

(i) *De la igualdad:*

$$n\,b_n = a_n + (n-1)\,b_{n-1}$$

se tiene:

$$(1 - \frac{1}{2n})(n\,b_n)^2 = (1 - \frac{1}{2n})\{a_n + (n-1)\,b_{n-1}\}^2$$

$$\leqslant 2n\,(1 - \frac{1}{2n})(a_n)^2 + (n-1)^2\,(b_{n-1})^2 \,, \qquad \text{\# Nota}$$

o sea

$$(2n-1)\,(b_n)^2 \leqslant \frac{4n-2}{n}\,(a_n)^2 + \frac{2(n-1)^2}{n}\,(b_{n-1})^2 .$$

Restando $(2n^2\,(b_n)^2)/(n+1)$ *de ambos miembros de la desigualdad anterior se tiene:*

$$\frac{n-1}{n+1}\,(b_n)^2 \leqslant [4 - \frac{2}{n}](a_n)^2 + \frac{2(n-1)^2}{n}\,(b_{n-1})^2 - \frac{2\,n^2}{n+1}\,(b_n)^2$$

$$\leqslant 4\,(a_n)^2 + \frac{2(n-1)^2}{n}\,(b_{n-1})^2 - \frac{2\,n^2}{n+1}\,(b_n)^2 \,,$$

luego:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n+1}\,(b_n)^2 \leqslant 4 \sum_{n=2}^{N} (a_n)^2 + (b_1)^2 - \frac{2\,N^2}{N+1}\,(b_N)^2 \quad \left(\begin{matrix}\text{serie}\\ \text{telescópica}\end{matrix}\right)$$

$$\leqslant 4 \sum_{1}^{\infty} (a_n)^2 + (b_1)^2 < +\infty \,,$$

por lo tanto, la serie $\Sigma\ \frac{n-1}{n+1}\,(b_n)^2$ *converge. Pero como*

$$\frac{n-1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

entonces la serie $\Sigma\,(b_n)^2$ *converge.*

ii) $$a_n \cdot b_n \leqslant (a_n)^2 + (b_n)^2$$

entonces la serie $\Sigma \; a_n \, b_n$ converge .

\# Nota

$$2n\,(1 - \frac{1}{2n})\, B^2 + C^2 - (1 - \frac{1}{2n})\,(B + C)^2$$

$$= 2n\,(1 - \frac{1}{2n})^2\, B^2 + \frac{1}{2n}\, C^2 - 2(1 - \frac{1}{2n})\, B\, C$$

$$= [\sqrt{2n}\,(1 - \frac{1}{2n})\, B - \frac{1}{\sqrt{2n}}\, C\,]^2 \geq 0 \; . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 111

Sea $S = \{ n_1 , n_2 , n_3 , \ldots \}$ la colección de todos los números naturales que no contienen el número 0 en su desarrollo decimal . Demostrar que $\Sigma \; 1/n_k$ converge y su suma total es menor que 90 .

Solución

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9} < 9$$

$$\underbrace{\frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{19}}_{\substack{\wedge \\ 9/10}} + \underbrace{\frac{1}{21} + \ldots + \frac{1}{29}}_{\substack{\wedge \\ 9/20}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{91} + \ldots + \frac{1}{99}}_{\substack{\wedge \\ 9/90}}$$

$$< \frac{9}{10} + \frac{9}{20} + \ldots + \frac{9}{90} < 9 \times \frac{9}{10} \; ,$$

$$\frac{1}{111} + \ldots + \frac{1}{999} < (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9})\; 9 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} < 9 \times (\frac{9}{10})^2 \; ,$$

Así :

$$\Sigma \frac{1}{n_k} < 9 \;\; 1 + \frac{9}{10} + (\frac{9}{10})^2 + \ldots \;\} = \frac{9}{1 - (9/10)} = 90 \; . \quad \bullet$$

EJERCICIO 112

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números enteros tales que $1 \leqslant a_n \leqslant n - 1$. Demostrar que la suma total de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n / n!$ es racional si y

sólo si existe un número N tal que

$$a_n = n - 1 \qquad \text{para todo} \quad n > N .$$

Solución

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n!} = \sum_{N+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right] = \frac{1}{N!} .$$

(i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} = \frac{p}{q}$ (p , q son naturales) entonces ,

$$0 < -\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n!} + \frac{p}{q} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \leqslant \frac{1}{N!} . \tag{38}$$

Sea N un número natural tal que q divide a $N!$, entonces

$$-\sum_{1}^{N} \frac{a_n}{n!} + \frac{p}{q} = \frac{m}{N!} \quad (m \text{ es natural}) .$$

De (38) :

$$0 \leqslant \frac{m}{N!} \leqslant \frac{1}{N!} ,$$

esto es, $m = 0$, ó , $m = 1$.

Si $m = 0$ entonces $a_n = 0$ para todo $n > N$ (imposible ya que $a_n \geqslant 1$).

Si $m = 1$ entonces $a_n = n - 1$ para todo $n > N$.

(ii) Si $a_n = n - 1$ para todo $n > N$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{N!} = \text{número racional} . \bullet$$

EJERCICIO 113

Demostrar que la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n!\,\pi\, e) .$$

Solución

$$e = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} ,$$

$$n!\ e = n!\{1 + 1 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\} + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Pero :

$$n!\{1 + 1 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\} = 1 + n + \underbrace{n(n-1) + \dots + n! + n!}_{\text{número par}}$$

$$= (n+1) + (\text{número par}).$$

También :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \}$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \} = \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{(n+1)!}.$$

Sea $\quad n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = a_n \quad$ *entonces :*

$$0 < a_n < n! \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$a_n - a_{n+1} = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} - (n+1)! \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$> \frac{1}{n+1} - \frac{n+3}{(n+2)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} > 0 ,$$

entonces la sucesión $\{a_n\}$ *es decreciente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\,(n!\,\pi\, e) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\,\{(n+1) + (\text{número par}) + a_n\}\pi$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\,\{(n+1)\pi + a_n \pi\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\ \text{sen}\, a_n \pi .$$

Como $\{\text{sen}\, a_n \pi\}$ *es decreciente y tiende a cero, entonces la serie dada converge.* ●

EJERCICIO 114
Demostrar :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(9n^2-1)} = \frac{3}{2}(\log 3 - 1).$$

Solución

$$\frac{1}{n(9n^2-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{3}{2}\frac{1}{3n-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{3n+1}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{n} + \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}\right\}.$$

Entonces :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(9n^2-1)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{3N+1}\right\}$$

$$= -\frac{3}{2}\left\{\log N + C + O\left(\frac{1}{N}\right)\right\} + \left\{-1 + \log(3N) + C + O\left(\frac{1}{N}\right)\right\}$$

$$= \frac{3}{2}(\log 3 - 1) + O\left(\frac{1}{N}\right) \to \frac{3}{2}(\log 3 - 1). \blacksquare$$

EJERCICIO 115

Demostrar :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{8}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2} = \frac{3}{2} - 2\log 2.$

Solución

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{1}{8} \text{ (serie telescópica) .}$$

(ii) $$\frac{1}{n(4n^2-1)^2} = \frac{1}{n} - \left\{\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right\} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right\}$$

$$= (1 - 2\log 2) + \frac{1}{2}(1-0) = \frac{3}{2} - 2\log 2.$$

EJERCICIO 116

Hallar el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(36n^2-1)}$.

Solución

$$\frac{1}{n(36n^2-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{3}{6n-1} + \frac{3}{6n+1} ,$$

$$3\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n+1}\right] = 3\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{6n-3}+\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n+1}\right] - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1}$$

$$= 3\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots \quad +\frac{1}{6N+1}\right\} - \left\{1+\frac{1}{3}+\dots \quad +\frac{1}{2N-1}\right\},$$

$$= 3\left(\log 2\sqrt{3N} - 1 + \frac{C}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) - \left(\log 2\sqrt{N} + \frac{C}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) ,$$

entonces :

$$\sum_{1}^{N} \frac{1}{n(36n^2-1)} = -\sum_{1}^{N}\frac{1}{n} + 3\sum_{1}^{N}\left(\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n+1}\right)$$

$$= -(\log N + C) + \left(3\log 2\sqrt{3N} - 3 + \frac{3}{2}C\right) - \left(\log 2\sqrt{N} + \frac{C}{2}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \log 12\sqrt{3} - 3 + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \to \quad -3 + 2\log 2 + \frac{3}{2}\log 3 .$$

●

EJERCICIO 117

Hallar la suma total de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n^2-1}{n(4n^2-1)^2}$.

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n^2-1}{n(4n^2-1)^2} = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4n^2-1)^2}$$

$$= 2\log 2 \quad (\text{Utilizar Ejercicio 115.}).$$

●

EJERCICIO 118

Investigar la convergencia o divergencia de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\phi(n)} \qquad (x > 0)$$

donde $\qquad \phi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Solución

$$\phi(n) = \log n + C + O(\tfrac{1}{N}) \qquad (C = \text{constante de Euler})$$

$$x^{\phi(n)} = x^{\log n + C + O(1/n)} = x^{C+O(1/n)}\, x^{\log n}$$

$$= x^{C+O(1/n)}\, n^{\log x}.$$

Sea $\quad a_n = n^{\log x}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} x^{\phi(n)} / a_n = \lim_{n\to\infty} x^{C+O(1/n)} = x^C \neq 0 ,$$

entonces la seria dada converge si y sólo si la serie $\sum a_n$ converge.

La serie $\sum a_n$ converge si $\log x < -1$ (ó $x < e^{-1}$) y diverge si $\log x \geqslant -1$ (ó $x \geqslant e^{-1}$). ■

EJERCICIO 119

Investigar la convergencia o divergencia de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} \right\} \frac{1}{n^s} \qquad (s < 1).$$

Solución

Utilizando el teorema 10 , sea :

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} = \frac{n^{1-s}}{1-s} + D + d_n ,$$

$$d_n \leqslant \frac{1}{n^s} \qquad , \quad D = \text{constante}.$$

Entonces :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s}\right) \frac{1}{n^s}$$

$$= \frac{1}{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2s-1}} + D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{d_n}{n^s} \qquad (39)$$

Si $\frac{1}{2} < s$ *entonces las dos series en* (39) *convergen condicionalmente y la última serie en* (39) *converge absolutamente, luego la serie dada converge.*

Si $0 < s \leq \frac{1}{2}$ *entonces* $\{1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\}\frac{1}{n^s}$ *no tiende a cero cuando* $n \to \infty$, *por lo tanto la serie diverge.* ●

EJERCICIO 120

Sea

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \quad (0 < a \leq 1 \ , \ s > 1)$$

i) Demostrar que la serie converge absolutamente para $s > 1$ *y que*

$$\sum_{h=1}^{k} \zeta(s, \frac{h}{k}) = k^s \zeta(s) \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

donde $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$.

ii) Demostrar :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^s = \{1 - 2^{1-s}\}\zeta(s) \qquad (s > 1).$$

Nota : La función $\zeta(s)$ se llama <u>función zeta de Riemann</u>

<u>*Solución*</u>

i) $$\sum \left|\frac{1}{(n+a)^s}\right| \leq \sum \frac{1}{n^s} < +\infty \qquad si \quad s > 1 \ , \ a > 0 .$$

$$\sum_{h=1}^{k} \zeta(s, h/k) = \sum_{h=1}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} (n + h/k)^{-s}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{k} (n + h/k)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{\left[\frac{h+nk}{k}\right]^s}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left[\frac{1+m}{k}\right]^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^s}{(1+m)^s} = k^s \zeta(s, 1) = k^s \zeta(s) .$$

ii) $$\sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(1+n)^s}$$

$$= \sum_{m=0}^{2m \leq N} \frac{1}{(1+2m)^s} - \sum_{m=0}^{2m+1 \leq N} \frac{1}{\{1 + (2m+1)\}^s}$$

$$= \sum_{m=o}^{2m\leqslant N} \frac{1}{(1+2m)^s} + \sum_{m=o}^{2m+1\leqslant N} \frac{1}{\{1+(2m+1)\}^s} - 2\sum_{m=o}^{2m+1\leqslant N} \frac{1}{\{1+(2m+1)\}^s}$$

$$= \sum_{n=o}^{N} \frac{1}{(1+n)^s} - 2\sum_{m=o}^{2m+1\leqslant N} \frac{1}{2^s(1+m)^s}$$

$$\longrightarrow \zeta(s) - \frac{2}{2^s}\zeta(s) = (1-2^{1-s})\,\zeta(s). \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 121

i) Sean $\Sigma\, a_n$ una serie convergente condicionalmente, $\Sigma\, b_n$ convergente absolutamente, demostrar que $\Sigma\,(a_n + b_n)$ converge condicionalmente.

ii) ¿ Qué puede decirse la convergencia de $\Sigma\,(a_n + b_n)$ si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ convergen condicionalmente ?

Solución

i) Si $\Sigma\,(a_n + b_n)$ converge absolutamente, entonces :

$$\sum^{\infty} |a_n + b_n| < +\infty .$$

Pero como $\sum^{\infty} |b_n| < +\infty$, entonces :

$$\Sigma\,|a_n| = \Sigma\,|a_n + b_n - b_n| \leqslant \Sigma\,|a_n + b_n| + \Sigma\,|b_n| < +\infty ,$$

o sea que $\Sigma\, a_n$ converge absolutamente (absurdo !). Por lo tanto, la serie $\Sigma\,(a_n + b_n)$ converge condicionalmente.

(ii) Ejemplo 1

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} , \quad b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n+1} ,$$

$$\Sigma\,(a_n + b_n) = \Sigma\,(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right\} \text{ converge condicionalmente.}$$

Ejemplo 2

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} , \quad b_n = (-1)^{n}\frac{1}{n+1} ,$$

$$\Sigma\,(a_n + b_n) = \Sigma\,(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right\} = \Sigma\,(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)} ,$$

ésta converge absolutamente. ●

EJERCICIO 122

Sea $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par}, \end{cases}$

demostrar que la serie alternada diverge.

Solución

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$

entonces

$$S_{2n} = \left\{ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} \right\}$$

$$\longrightarrow -\infty \ (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 123

Sea $\sum a_n$ una serie divergente, demostrar que la serie $\sum a_n b_n$ diverge donde $\{b_n\}$ es una sucesión creciente de términos positivos.

Solución

Si $\sum a_n b_n$ converge, por el criterio de Abel (Ejemplo 39) la serie $\sum a_n = \sum \frac{1}{b_n} (a_n b_n)$ converge. (absurdo !) $\blacksquare$

EJERCICIO 124

Demostrar:

(i) $\sum a_n b_n$ converge si $\sum a_n$ converge y $\sum (b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente.

(ii) $\sum a_n b_n$ converge si $\sum a_n$ tiene la suma parcial acotada, $\sum (b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Solución

(i) Sea $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) \qquad (40)$$

Como $\{A_k\}$ es convergente, entonces $\{A_k\}$ es acotada, sea

$$A_k \leq C \qquad \text{para todo } k,$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq C \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| < +\infty \, .$$

Además, la serie $\Sigma\,(b_k - b_{k+1})$ converge, luego la sucesión $\{b_n\}$ converge ya que

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \, .$$

Por lo tanto, de (40), la serie $\Sigma\, a_k\, b_k$ converge.

(ii) De (40), $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolutamente, y

$A_n\, b_{n+1} \to 0 \; (n \to \infty)$. ∎

EJERCICIO 125

Sea $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $a_{2n} = \frac{n-1}{n^2}$, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Solución

La serie $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$

converge y la sucesión:

$$\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots\}$$

es monótona y tiende a 1, entonces (Criterio de Abel, Ejemplo 39) la serie

$$0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} - \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} - \ldots$$

converge. ∎

EJERCICIO 126

Demostrar que la serie

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots$$

diverge.

Solución

S_{3n} (= la suma parcial de los primeros $3n$ términos)

$$> \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n}$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{2} + \dots \qquad + \frac{1}{n} \right] \quad \to \quad +\infty \, . \bullet$$

EJERCICIO 127

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots .$

Si reordenamos la serie de tal forma que p términos positivos y q términos negativos vienen alternadamente, demostrar que esta reordenación converge a $\log 2 + \frac{1}{2}\log(p/q)$.

Solución

$$T_n = \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{1}{1+2np} + \frac{1}{1+2(np+1)} + \dots + \frac{1}{1+2(np+p-1)} \right\}$$

$$- \left\{ \frac{1}{2(nq+1)} + \frac{1}{2(nq+2)} + \dots + \frac{1}{2(nq+q)} \right\}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1+2(np+p-1)} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2(nq+q)} \right\}$$

$$= \left\{ \log 2\sqrt{np+p} + \frac{C}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} - \frac{1}{2}\left\{ \log(nq+q) + C + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$= \log 2 + \log \frac{\sqrt{np+p}}{\sqrt{nq+q}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \to \quad \log 2 + \frac{1}{2}\log(p/q) \quad (n \to \infty) \, . \bullet$$

EJERCICIO 128

Demostrar que la serie $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ converge, pero la siguiente serie diverge :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \dots - \frac{1}{2p+q} + \frac{1}{2p+q+1} + \dots .$$

donde $p+q$ términos negativos siempre vienen siguiendo despues de p términos positivos.

Solución

Sea S_n la suma parcial de los n primeros términos de la serie, en-

tonces :

$$S_{m(2p+q)} = \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1}+\dots+\frac{1}{2p+q}\right) + \dots$$

$$\dots - \left(\frac{1}{(m-1)(2p+q)+p+1}+\dots+\frac{1}{m(2p+q)}\right)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+q+1} - \frac{1}{3p+q+1} + \dots \quad - \frac{1}{(m-1)(2p+q)+p+1}\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{2p+q+2} - \dots \quad \frac{1}{(m-1)(2p+q)+p+2}\right]$$

$$+ \dots \quad + \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+p} + \dots \quad \frac{1}{(m-1)(2p-q)+p+p}\right]$$

$$- \left[\left\{\frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right\} + \left\{\frac{1}{(2p+1)+(2p+q)} + \dots + \frac{1}{(2p+q)+(2p+q)}\right\} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \left\{\frac{1}{(2p+1)+(m-1)(2p+q)} + \dots + \frac{1}{(2p+q)+(m-1)(2p+q)}\right\}\right]$$

las primeras p series convergen cuando $m \to \infty$, pero la última diverge a $-\infty$ ya que

$$\left[\left\{\frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right\} + \dots \quad + \left\{ \dots \quad + \frac{1}{m(2p+q)}\right\}\right]$$

$$> \frac{q}{2p+q} + \frac{q}{2(2p+q)} + \dots \quad + \frac{q}{m(2p+q)}$$

$$= \frac{q}{2p+q}\left\{1 + \frac{1}{2} + \dots \quad + \frac{1}{m}\right\} \to \infty \quad (m \to \infty),$$

entonces

$$S_{m(2p-q)} \to -\infty \quad (m \to \infty). \quad \bullet$$

EJERCICIO 129 ⊕

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie condicionalmente convergente a S. Para S' ($S' > S$) dado, demostrar que existe una reordenación de los térmi

nos negativos de la serie $\Sigma\, a_n$ *que converge a* S'.

(O sea, existe una biyección w *de* N *sobre* N *tal que* $w(k) = k$ *para* $a_k > 0$ *, y que* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{w(k)} = S'$. *)*

<u>*Solución*</u>

[1] <u>*Caso particular*</u>

Consideremos la serie condicionalmente convergente :

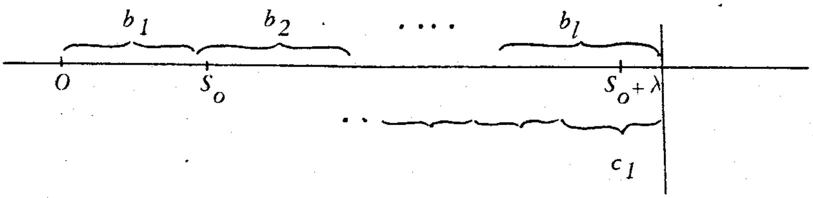
$$b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + \dots + b_n - c_n + \dots \quad = S_o \qquad (41)$$

$$(b_n \,,\, c_n > 0)$$

Sea λ *un número positivo dado , entonces existe* l *tal que*

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + \dots + b_l \geq S_o + \lambda \\ b_1 + b_2 + \dots + b_{l-1} < S_o + \lambda \end{cases}$$

(o sea , $\sum_{k=1}^{l} b_k$ *es la primera suma parcial de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *que sobrepasa a* $S_o + \lambda$ *.)*



Como

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_l) - c_1 + b_{l+1} - c_2 + \dots \qquad = S_o < S_o + \lambda$$

entonces existe j *tal que*

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_l) - c_1 + b_{l+1} - c_2 + \dots + b_{l+j-1} - c_{l+j} < S_o + \lambda$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$ *existe* $m \geq l + j$ *tal que*

$$\begin{cases} (b_1 + \dots + b_l) - c_1 + \dots + b_{l+j-1} - c_{l+j} + (b_{l+j} + \dots + b_m) \geq S_o + \lambda \\ (b_1 + \dots + b_l) - c_1 + \dots + b_{l+j-1} - c_{l+j} + (b_{l+j} + \dots + b_{m-1}) < S_o + \lambda . \end{cases}$$

Así sucesivamente se obtiene una reordenación de la serie (41) que con-

verge a $S_o + \lambda$ *de tal manera que los términos negativos* <u>no aparezcan seguidos</u>:

$$\{b_1 + \cdots + b_{\pi(1)}\} - c_1 + \{b_{\pi(1)+1} + \cdots + b_{\pi(2)}\} - c_2 + \cdots = S_o + \lambda \quad (42)$$

En (42), debe haber un número infinito de naturales n *tales que*

$$\pi(n) - \pi(n-1) \geq 2 \ ,$$

puesto que si $\pi(n) - \pi(n-1) = 1$ *para todo* $n \geq N_o$ *(para algún* N_o*), la suma de la serie (42) debería ser igual a* S_o.

[II] *Sea* $\{-q_n\}$ *la sucesión formada por todos los términos negativos de la sucesión* $\{a_n\}$. *Sea* $\lambda = S' - S > 0$ *entonces existe una subsucesión de* $\{q_n\}$, *digamos:*

$$q_{\sigma(1)},\ q_{\sigma(2)},\ \ldots\ ,\ q_{\sigma(k)}, \ldots$$

tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_{\sigma(k)} = \epsilon_o \qquad (\text{para algún } \epsilon_o \text{ diferente de } \infty) \quad (43)$$

Como la serie

$$q_1 - q_1 + q_2 - q_2 + q_3 - q_3 + \cdots + q_n - q_n + \cdots = 0 \quad (44)$$

entonces, de los términos negativos de la serie (44) eliminando los $q_{\sigma(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *tenemos:*

$$q_1 - q_1 + \cdots + q_{\sigma(1)} - q_{\sigma(1)+1} + q_{\sigma(1)+1} - \cdots + q_{\sigma(2)-1} - q_{\sigma(2)+1}$$

$$+ q_{\sigma(2)} - q_{\sigma(2)+2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q_{\sigma(k)} = \epsilon_o . \quad (45)$$

Aplicando el resultado obtenido en [I] *a la serie (45), podemos afirmar que existe* una reordenación de esta serie *que tiende a* $\lambda + \epsilon_o$, *de tal manera que los términos negativos no aparezcan seguidos. Ahora, entre los términos positivos seguidos (hay* <u>*un número infinito*</u> *de tales términos) de esta reordenación intercalamos los negativos*

$$-q_{\sigma(1)},\ -q_{\sigma(2)},\ -q_{\sigma(3)},\ \ldots\ ,\ -q_{\sigma(k)}, \ldots$$

así obtenemos una serie alternada que tiende a $\lambda + \epsilon_o - \epsilon_o = \lambda$:

$$q_1 \cdot q_{w(1)} + q_2 \cdot q_{w(2)} + q_3 \cdot q_{w(3)} + \cdots = \lambda ,$$

donde w *es una biyección de* $\mathbf{N}$ *sobre* $\mathbf{N}$. *En la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *reemplazamos* q_n *por* $q_{w(n)}$, *entonces la serie así obtenida converge a* $S + \lambda = S'$. ■

EJERCICIO 130

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *sean*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k , \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k , \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k ,$$

demostrar :

i) $t_n = (n+1) S_n - n\sigma_n$

ii) Si $\sum a_n$ *es sumable en Césaro, entonces* $\sum a_n$ *converge si y sólo si* $t_n = o(n)$. *[Nota : 'o' pequeño]*

iii) $\sum a_n$ *es sumable en Césaro si y sólo si*

$$\sum \frac{t_n}{n(n+1)} \quad \text{converge} .$$

<u>Solución</u>

(i) $$t_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n ,$$

$$n\sigma_n = na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + a_n ,$$

luego :

$$n\sigma_n + t_n = (n+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = (n+1) S_n .$$

(ii) De (i) :

$$S_n = \frac{t_n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\sigma_n .$$

Si $\sigma_n \to \sigma$ $(n\to\infty)$ *entonces* $\frac{n}{n+1}\sigma_n \to \sigma$, *por lo tanto*, $\{S_n\}$ *converge si y sólo si* $\{t_n/(n+1)\}$ *converge a cero* *<u>*Nota</u>*, *o sea que*

$$t_n = o(n) .$$

*<u>*Nota</u>:* $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n+1} = 0$ *ya que* $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$.

(iii)

$$\frac{t_n}{n+1} = S_n - \frac{n}{n+1}\sigma_n \;, \quad \frac{t_n}{n} = \frac{n+1}{n} S_n - \sigma_n \;,$$

luego :

$$\frac{t_n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} S_n - \frac{1}{n+1}\sigma_n \;.$$

Utilizando la relación $S_n = n\,\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}$ *se tiene :*

$$\frac{t_n}{n(n+1)} = \frac{1}{n}\left(n\sigma_n - (n-1)\,\sigma_{n-1}\right) - \frac{1}{n+1}\sigma_n$$

$$= \frac{n}{n+1}\,\sigma_n - \frac{n-1}{n}\,\sigma_{n-1} \;.$$

Por lo tanto :

$$\sum_1^N \frac{t_n}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}\,\sigma_N \;,$$

esto es , $\{\sigma_N\}$ *converge si y sólo si la serie* $\sum \frac{t_n}{n(n+1)}$ *converge* . ■

EJERCICIO 131

Dada una sucesión $\{a_n\}$, *decreciente que tiende a cero , sean*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \;, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \;, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_k \;;$$

demostrar :

i) $v_n = \frac{1}{2} u_n + (-1)^n \frac{S_n}{2}$

ii) $\sum_1^\infty (-1)^n S_n = \frac{1}{2} \sum_1^\infty (-1)^n a_n \;, \; (C, 1)$

iii) $\sum_1^\infty (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = -\log\sqrt{2} \quad (C, 1)$.

<u>*Solución*</u>

i) $2v_n - u_n = -(S_1 - a_1) + (S_2 - a_2) - \dots + (-1)^n (S_n - a_n)$

$$- S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n$$

$$= S_1 - S_2 + \dots + (-1)^n S_{n-1} - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n$$

$$= (-1)^n S_n \, ,$$

entonces :

$$v_n = \frac{1}{2} u_n + (-1)^n \frac{S_n}{2} .$$

(*ii*) *De* (*i*) :

$$\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_k$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{2n} v_n .$$

Como $\{u_n\}$ *tiende a* $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n = u_o$ *cuando* $n \to \infty$, *entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \to u_o \quad (n \to \infty) .$$

También :

$$\frac{u_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{ya que} \quad u_n \to u_o \, ,$$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_1^n a_k}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{ya que} \quad a_k \to 0 \, ,$$

entonces , de (*i*):

$$\frac{v_n}{n} = \frac{1}{2} \frac{u_n}{n} + \frac{(-1)^n}{2} \frac{S_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

De (46) *tenemos :*

$$\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} = \frac{1}{2n} \sum_1^n u_k + \frac{1}{2n} v_n \to \frac{1}{2} u_o$$

o sea,

$$\sum_1^{\infty} (-1)^n S_n = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (-1)^n a_n \quad (C, 1) .$$

(*iii*) *Tomando* $a_n = 1/n$, *de* (*ii*) *se tiene :*

$$\sum_1^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \frac{1}{2} (-\log 2) = -\log \sqrt{2}$$

$$(C, 1).$$

EJERCICIO 132

Demostrar que las siguientes series son sumables en Césaro:

i) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \log(n+1)$ *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{\log(n+1)\}^2$

Solución

i) Sea $a_n = \log\frac{n+1}{n}$, *entonces* $\{a_n\}$ *es decreciente y tiende a cero,*

y

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} [\log(k+1) - \log k] = \log(n+1),$$

del ejercicio 131 se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (C, 1).$$

ii) Sea $a_n = \{\log(n+1)\}^2 - \{\log n\}^2$, *entonces se puede demostrar que* $\{a_n\}$ *es decreciente y tiende a cero, y*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} [\{\log(n+1)\}^2 - (\log n)^2] = \{\log(n+1)\}^2,$$

del ejercicio 131 se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{\log(n+1)\}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (C, 1). \blacksquare$$

CAPITULO III

DOBLE SERIE

§ 20 Doble sucesión

Un conjunto ordenado en forma rectangular (ver Fig. 27) se llama <u>una doble sucesión</u>. Para determinar doble sucesión hay que dar el

* * * * * * * * * * * * * *

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1^a\textit{columna} & 2^a\textit{columna} & 3^a\textit{columna} & 4^a\textit{columna} & 5^a\textit{columna} & \end{array} \\
\begin{array}{c} 1^a\textit{fila} \\ 2^a\textit{fila} \\ 3^a\textit{fila} \\ 4^a\textit{fila} \\ \cdots \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right)
\end{array}$$

$n., k$ *elemento* $= (n + k) - 1$.

Fig. 27 (Un ejemplo de doble sucesión)

elemento que ocupa al puesto correspondiente a la *n-ésima fila* y *k-ésima columna* para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, lo llamaremos *n, k - elemento*.

Sea $a_{n,k}$ el n, k- elemento de la doble sucesión, la doble sucesión es expresada por $\{ a_{n,k} \}$. #<u>Nota</u>

* * * * * * * * * * * * * *

\# <u>Nota</u> Una doble sucesión es una función cuyo dominio es $N \times N$:

$$S = \{ a_{n,k} \} : \quad \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(n, k) \longmapsto a_{n,k}.$$

EJEMPLO 43 (*Ejemplos de doble sucesión*)

i) $A = \{a_{n,k}\}$, $a_{n,k} = \dfrac{1}{n+k}$, *entonces*

$$A = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \ldots\ldots \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{7}, & \ldots\ldots \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{7}, & \frac{1}{8}, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Bmatrix}$$

ii) $B = \{b_{n,k}\}$, $b_{n,k} = 1/(2^n 3^k)$ *entonces*

$$B = \begin{Bmatrix} \frac{1}{6}, & \frac{1}{18}, & \frac{1}{54}, & \frac{1}{162}, & \ldots\ldots \\ \frac{1}{12}, & \frac{1}{36}, & \frac{1}{108}, & \frac{1}{324}, & \ldots\ldots \\ \frac{1}{24}, & \frac{1}{72}, & \frac{1}{216}, & \frac{1}{648}, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Bmatrix}$$ ■

Dada una doble sucesión $\{a_{n,k}\}$, si $a_{n,k}$ se acerca a un valor L cuando n y k crecen infinitamente entonces se dice que la sucesión tiende a L y se nota

$$\lim_{n,k\to\infty} a_{n,k} = L . \qquad (1)$$

Más estrictamente, (1) implica que para cualquier $\epsilon > 0$ dado, aunque sea muy pequeño, existe N tal que

$$|a_{n,k} - L| < \epsilon \quad \textit{para todo } n, k \geqslant N \ (\textit{ver Fig. 28}) \qquad (2)$$

EJEMPLO 44

i) *Sea* $a_{n,k} = \dfrac{1}{n+k}$

entonces

$$\lim_{n,k\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0 \ .$$

ii) *Sea* $\quad a_{n,k} = \dfrac{1}{n} \quad$ *entonces* $\quad \lim\limits_{n,k\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \ .$

iii) *Sea* $\ a_{n,k} = c$ *(sucesión constante) :*

$$\{a_{n,k}\} = \begin{Bmatrix} c & c & c & c & c \ \ldots \\ c & c & c & c & c \ \ldots \\ c & c & c & c & c \ \ldots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{Bmatrix}$$

entonces

$$\lim_{n,k\to\infty} c = c \ .$$

* * * * * * * * * * * * *

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc|c} & & & N\text{-ésima} \\ & & & \text{columna} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ N\text{-ésima} \\ \text{fila} \\ \\ \end{array} & \left\{ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & & a_{1N} & \ldots & & \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & & a_{2N} & \ldots & & \\ \cdot & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & & \\ \hline a_{N1} & a_{N2} & \ldots & & a_{NN} & L & L & L \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & & L & & L & L \\ & & & & L & & L & L \end{array} \right\} \end{array}$$

Los elementos $a_{n,k}$ tales que $n \geqslant N$, $k \geqslant N$ ocupan la zona subrayada, y son aproximadamente iguales a L .

FIG . 28 $\quad (\lim\limits_{n,k\to\infty} a_{n,k} = L)$

iv) *Sea* $\quad a_{n,k} = \dfrac{n-k}{n+k} \ .$

Evidentemente el límite de $\{a_{n,k}\}$ *NO existe. Nótese que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-k}{n+k} = 1 \ , \quad \lim_{k\to\infty} \frac{n-k}{n+k} = -1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} a_{n,n} = 0 \ .$$

$$\{a_{n,k}\} = \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{4} & -\frac{3}{5} & \cdots \to -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{6} & \cdots \to -1 \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{7} & \cdots \to -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{6} & \frac{1}{7} & 0 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \searrow \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \end{array}\right\}$$

v) Sea $a_{n,k} = \frac{1}{n} \operatorname{sen} k$ entonces

$$\lim_{n,k\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} k = 0$$

ya que

$$\left| \frac{1}{n} \operatorname{sen} k - 0 \right| = \frac{1}{n} \left| \operatorname{sen} k \right| \leqslant \frac{1}{n} .$$

$$\{a_{n,k}\} = \left\{\begin{array}{ccccc} \operatorname{sen} 1 & \operatorname{sen} 2 & \operatorname{sen} 3 & \operatorname{sen} 4 & \cdots \\ \frac{\operatorname{sen} 1}{2} & \frac{\operatorname{sen} 2}{2} & \frac{\operatorname{sen} 3}{2} & \frac{\operatorname{sen} 4}{2} & \cdots \\ \frac{\operatorname{sen} 1}{3} & \frac{\operatorname{sen} 2}{3} & \frac{\operatorname{sen} 3}{3} & \frac{\operatorname{sen} 4}{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\}$$

Nótese que NO existe el límite : $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} k$, pero sí existe el límite : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} k = 0$ para todo k fijo.

vi) Sea $a_{n,k} = n + k$ entonces

$$\lim_{n,k\to\infty} a_{n,k} = +\infty \quad (\text{DIVERGE a más infinito})$$

vii) Sea $a_{n,k} = n - k$ entonces

$$\lim_{n,k\to\infty} (n - k) \quad \text{NO existe :}$$

$$\{a_{n,k}\} = \left\{\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & \to & -\infty \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & \cdots & \to & -\infty \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & \cdots & \to & -\infty \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & \cdots & \to & -\infty \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & & \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & & \searrow & 0 \end{array}\right\}$$

■

> *TEOREMA 16*
>
> Sea $\{a_{n,k}\}$ una doble sucesión que converge a S, si existe el límite $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k}$ para cada n fijo, entonces tenemos :
>
> $$\lim_{n\to\infty} \{ \lim_{k\to\infty} a_{n,k} \} = S \qquad (3)$$

NOTA : El límite que aparece en (3) se llama *LIMITE ITERADO* (ver Fig . 29)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & \to S_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & \to S_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \to \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & \to S_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \downarrow \\ & & & & & & \boxed{S} \end{array}\right.$$

FIG. 29 ($S_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k}$, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$)

<u>*Demostración*</u>

Dado $\epsilon > 0$ *existe* N_o *tal que*

$$|a_{n,k} - S| < \epsilon \qquad \text{para todo } n, k \geq N_o . \qquad (4)$$

Sea $S_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k}$, *si* $n \geq N_o$ *de* (4) *tomando el límite cuando* $k \to \infty$ *se obtiene :*

$$|s_n - S| \leq \epsilon ,$$

esto es :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

EJEMPLO 45

i) $\displaystyle\lim_{n,k\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ (para cada n fijo) , y

$$\lim_{n\to\infty} \{ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n+k} \} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 .$$

ii) $\displaystyle\lim_{n,k\to\infty} \frac{\text{sen } k}{n} = 0$, pero No existe el límite cuando $k\to\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{ \lim_{k\to\infty} \frac{\text{sen } k}{n} \} \qquad \text{NO TIENE SENTIDO} .$$

iii) Sea $\displaystyle a_{n,k} = \frac{n\,k}{n^2 + k^2}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n\,k}{n^2 + k^2} = 0$$

luego :

$$\lim_{n\to\infty} \{ \lim_{k\to\infty} \frac{nk}{n^2 + k^2} \} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

pero NO existe el doble límite # : $\displaystyle\lim_{n,k\to\infty} \frac{nk}{n^2 + k^2}$

\# Para cualquier N_o si $n = k \geqslant N_o$ entonces

$$a_{n,k} = a_{n,n} = \frac{n^2}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2}$$

Si $n \geqslant N_o$ $k = 2n > N_o$ entonces

$$a_{n,2n} = \frac{2\,n^2}{n^2 + 4n^2} = \frac{2}{5}$$

Como $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$ se ve que NO EXISTE el límite de esta doble sucesión .

EJERCICIO 133

Investigar la existencia de los límites :

$$\lim_{n,k\to\infty} a_{n,k} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \{ \lim_{k\to\infty} a_{n,k} \} \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \{ \lim_{n\to\infty} a_{n,k} \}$$

i) $a_{n,k} = \dfrac{1}{n^2 + k^2}$

ii) $a_{n,k} = \dfrac{k}{n - k}$

iii) $a_{n,k} = \dfrac{(-1)^n\, n}{n + k}$

iv) $a_{n,k} = (-1)^{n+k} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k} \right)$

v) $a_{n,k} = \dfrac{(-1)^n}{k}$

vi) $a_{n,k} = (-1)^{n+k}$

vii) $a_{n,k} = \dfrac{\cos(n\pi/3)}{k}$

viii) $a_{n,k} = \dfrac{n}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sen} \dfrac{i}{n}$

ix) $a_{n,k} = \dfrac{n + k}{n^2 + k^2}$

x) $a_{n,k} = \dfrac{n - k}{n^2 + k^2}$

xi) $a_{n,k} = \dfrac{nk}{n^3 + k^3}$

xii) $a_{n,k} = (-1)^n \dfrac{n^2 k^3}{n^3 + k^6}$

RESPUESTA

i) Los tres límites $= 0$.

ii) $\lim_{n\to\infty} \{ \lim_{k\to\infty} \dfrac{k}{n+k} \} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

$\lim_{k\to\infty} \{ \lim_{n\to\infty} \dfrac{k}{n+k} \} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$.

El límite doble NO existe.

iii) $\lim_{n\to\infty} \{ \lim_{k\to\infty} \dfrac{(-1)^n\, n}{n+k} \} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

$\lim_{k\to\infty} \{ \lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n\, n}{n+k} \}$ NO existe.

El límite doble NO existe.

iv) El límite doble es cero.

Los límites iterados NO existen.

v) *El límite doble es cero.*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^n}{k} \right\} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{k} \right\} \quad \text{NO existe.}$$

vi) *Ninguno de los tres límites existe.*

vii) *El límite doble* $= 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{k\to\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{k} \right\} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{k} \right\} \text{ NO existe.}$$

viii) $$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{sen} \frac{i}{n} = \frac{\operatorname{sen}(k/2n)\ \operatorname{sen}\{(k+1)/2n\}}{\operatorname{sen}(1/2n)} ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{k\to\infty} \frac{n}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sen} \frac{i}{n} \right\} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sen} \frac{i}{n} \right\} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{2k^2} = \frac{1}{2}$$

El límite doble NO existe (si existiera se tendría $0 = \frac{1}{2}$.).

ix) $$\lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{k\to\infty} \frac{n+k}{n^2+k^2} \right\} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{n+k}{n^2+k^2} \right\} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0 .$$

El límite doble es cero como puede verse de la siguiente manera:

$$n^2 + k^2 \geqslant \frac{1}{2}(n+k)^2 ,$$

$$0 \leqslant \frac{n+k}{n^2+k^2} \leqslant \frac{2(n+k)}{(n+k)^2} = \frac{2}{n+k} \to 0 \quad (n, k \to \infty) .$$

x) *Los límites iterados* $= 0$, *y el límite doble es cero (similar a ix)).*

xi) *Los tres límites* $= 0$.

Nótese que $n^3 + k^3 = (n+k)(n^2 - nk + k^2) \geqslant (n-k)nk$,

entonces

$$\frac{nk}{n^3+k^3} \leqslant \frac{nk}{nk(n+k)} = \frac{1}{n+k}.$$

xii) $\lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{k\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 k^3}{n^3+k^6} \right\} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 k^3}{n^3+k^6} \right\} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

El límite doble NO existe :

Si $n = k^2$, $\frac{n^2 k^3}{n^3+k^6} = \frac{k^7}{2k^6} = \frac{k}{2} \to +\infty \ (k\to\infty)$, entonces

$$(-1)^n \frac{n^2 k^3}{n^3+k^6} \to \begin{cases} +\infty & (n = k^2 \quad k \text{ es par}) \\ -\infty & (n = k^2 \quad k \text{ es impar}) \end{cases}$$

■

EJERCICIO 134

Demostrar que una doble sucesión $\{a_{n,k}\}$ converge si y sólo si, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$n, k \geqslant N \quad \text{implica} \quad |a_{n+p,k+q} - a_{n,k}| < \epsilon \qquad (5)$$

donde $p, q = 1, 2, 3, \ldots$

Solución

i) Si $\lim_{n,k\to\infty} a_{n,k} = A$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|a_{n,k} - A| < \epsilon/2 \quad \text{para todo} \quad n, k \geqslant N \qquad (6)$$

luego, para todo $p, q > 0$ tenemos

$$|a_{n+p,k+q} \quad A| < \epsilon/2 \qquad (7)$$

De (6) y (7) se tiene la desigualdad (5)

ii) Suponemos válida la condición (5), sea $b_n = a_{n,n}$, la sucesión $\{b_n\}$ satisface la condición de Cauchy, entonces existe el límite :

$$A = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_{n,n}$$

En (5), *escogemos* p *y* q *como* $n + p = k + q$ *y tomamos límite cuando* $n + p = k + q \to \infty$, *entonces* :

$$| A - a_{n,k} | \leqslant \epsilon \quad (n, k > N),$$

esto es :

$$\lim_{n,k\to\infty} a_{n,k} = A. \quad \blacksquare$$

§ 21 Doble serie

Dada una doble sucesión $\{a_{n,k}\}$, por un procedimiento similar al utilizado en el caso de una serie se obtiene una nueva doble sucesión $\{S(p, q)\}$ como sigue :

$$S(p,q) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{n,k}, \tag{8}$$

esta doble sucesión $\{S(p, q)\}$ se llama *DOBLE SERIE*, y se nota

$$\{S(p,q)\} = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}. \tag{9}$$

En caso de que exista el límite :

$$\lim_{p,q\to\infty} S(p,q) = S,$$

se dice que la doble serie converge a S, o S es la suma total de la doble

* * * * * * * * * * *

$$\left\{\begin{array}{ll} \overset{S(p,q)}{\boxed{\begin{array}{l} a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,q} \\ a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,q} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{p,1} + a_{p,2} + \cdots + a_{p,q} \end{array}}} & \begin{array}{l} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \end{array}\right\} = \{a_{n,k}\}$$

FIG. 30 (Suma parcial $S(p,q)$ de la doble serie)

serie y se nota :

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} = S . \qquad (10)$$

Nótese que la escritura $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ a veces representa una *doble sucesión* ((9)) , y a veces representa *un valor numérico* (el caso (10)) .

EJEMPLO 46

i) Sea $a_{n,k} = \dfrac{1}{2^n 3^k}$ *, entonces*

$$S(p, q) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2^n \cdot 3^k} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{3^k}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right)\left(1 - \frac{1}{3^q} \right) \to \frac{1}{2} \quad (p, q \to \infty) ,$$

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 3^k} = \frac{1}{2} .$$

ii) Sea $a_{n,k} = 1$,

$$S(p, q) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} 1 = \sum_{n=1}^{p} 1 \sum_{k=1}^{q} 1 = p \times q ,$$

entonces la serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} 1$ *es la doble sucesión* $\{pq\}$:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} 1 = \{pq\} .$$

* * * * * * * * *

$$\{a_{n,k}\} = \left(\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \quad 1 \quad 1 \ \ldots\ 1}}^{\text{q columnas}} \\ \left.\boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{array}}\right\} \text{p filas} \ \begin{array}{c} \ldots \\ \ldots \\ \cdot \\ \ldots \end{array} \end{array} \right) \qquad \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n,k=1}^{\infty} 1 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \ldots \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\}$$

FIG. 31 $\{a_{n,k}\}$ *y* $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$.

Como $\{pq\}$ *diverge a* $+\infty$ *cuando* $p, q \to \infty$ *entonces :*

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} 1 = +\infty . \quad \text{(ver Fig. 31)}$$

iii) Sea

$$a_{n,k} = 1 \quad \text{si } n = k+1$$
$$\quad = -1 \quad \text{si } n = k-1$$
$$\quad = 0 \quad \text{si } |n-k| \neq 1 \Bigg\},$$

$$S(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q > p \\ -1 & \text{si } q < p \\ 0 & \text{si } q = p . \quad \text{(ver Fig. 32)} \end{cases}$$

Entonces la serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ diverge (ver Fig. 33).

* * * * * * * * *

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccccc} & & & & & \text{p ésima columna} & & \text{q ésima columna} \end{array} \\
\{a_{n,k}\} = & \left\{ \begin{array}{cccccc|cccc}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & & & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \ldots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 0 & \boxed{1} & \ldots & & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \right\} \\
\text{p ésima fila} &
\end{array}$$

FIG. 32 [La sucesión $\{a_{n,k}\}$, El caso $q > p$.]

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} = \left\{ \begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \ldots & & \\
-1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & \ldots & & \\
 & & & & & 1 & & \\
-1 & -1 & 0 & 1 & \ldots & \ldots & & \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 1 & & & \\
-1 & & & & 0 & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \right\},$$

FIG. 33 Serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$

EJERCICIO 135

Demostrar que una doble serie de términos positivos :

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} \qquad\qquad a_{n,k} \geq 0 \quad \textit{para todo } n, k$$

converge si y sólo si la suma parcial es acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ *tal que*

$$S(p, q) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{n,k} \leq M \qquad \textit{para todo } p, q .$$

Sugerencia

i) Sea $S = Sup \{ S(p,q) / \ p, q = 1, 2, 3, \ldots \}$

entonces dado $\epsilon > 0$ *existe* (p_o, q_o) *tal que* $S(p_o, q_o) > S - \epsilon$,

sea $\qquad N_o = Máximo \{ p_o, q_o \}$

entonces para todo $p, q \geq N_o$ *se tiene*

$$| S(p, q) - S | < \epsilon . \quad \bullet$$

EJERCICIO 136 (Condición de Cauchy)

Demostrar que una doble serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ *converge si y sólo si satisface la condición siguiente:*

Dado $\epsilon > 0$ *existe* N_o *tal que*

$$n, k \geq N_o \quad \textit{implica} \quad \left| \sum_{i=n}^{n+p} \sum_{j=k}^{k+q} a_{i,j} \right| < \epsilon \ (p, q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sugerencia

Sea $S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}$, *aplicar el ejercicio 81 a la doble sucesión* $\{ S(n,k) \}$. $\bullet$

EJERCICIO 137

Demostrar que una doble serie converge si converge absolutamente.

NOTA: Se dice que la doble serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} \lvert a_{n,k} \rvert$ converge.

Sugerencia

Aplicar el ejercicio 83. $\bullet$

EJERCICIO 138

Demostrar que la doble serie

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} e^{-(n^2+k^2)}$$

converge.

Solución

$$\sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} e^{-(n^2+k^2)} = \sum_{n=1}^{p} e^{-n^2} \sum_{k=1}^{q} e^{-k^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$$

pero tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}$$

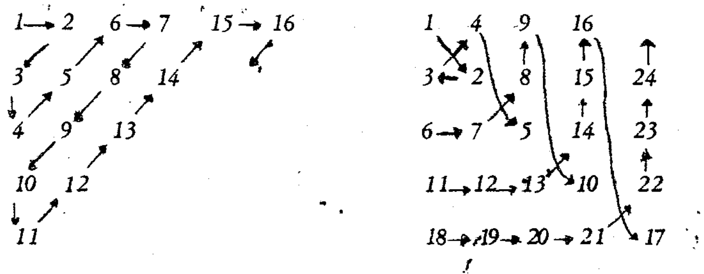
entonces

$$\sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} e^{-(n^2+k^2)} \leqslant \left[\frac{1}{e-1}\right]^2 < +\infty . \blacksquare$$

§ 22 Reordenación de una serie sencilla en una doble serie

Sea N el conjunto de todos los números naturales, sabemos que hay muchas maneras para reordenar N en forma cuadrada (ver Fig. 34)

* * * * * * * * *



Ejemplo 1 *Ejemplo 2*

FIG. 34 (Ejemplos de la reordenación de N)

Consideramos una reordenación de N en forma cuadrada, sea $f_n(k)$ el número correspondiente a la n-*ésima* fila y k-*ésima* columna (ver Fig. 35), es decir, la n-*esima* fila es una sucesión $\{f_n(1), f_n(2), \ldots, f_n(k), \ldots\}$. O sea, f_n es una función uno a uno de N en N:

$$f_n : \quad N \longrightarrow f_n(N) \subset N$$
$$k \longmapsto f_n(k)$$

y los $f_n(N)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ son disyuntos y además

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(N) = N .$$

* * * * * * * *

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccccccc} 1^a\ col. & 2^a\ col. & 3^a\ col. & 4^a\ col. & & k\text{-ésima columna} & \end{array} \\
\begin{array}{r} 1^a\ fila \\ 2^a\ fila \\ 3^a\ fila \\ \\ n\text{-ésima fila} \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccc}
f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & f_1(4) & \ldots & f_1(k) & \\
f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & f_2(4) & \ldots & f_2(k) & \ldots \\
f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) & \ldots & f_3(k) & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\
f_n(1) & f_n(2) & f_n(3) & f_n(4) & \ldots & f_n(k) & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots
\end{array}\right)
\end{array}$$

FIG. 35

Correspondiente a una reordenación cuadrada dada de N, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser reordenada en *DOBLE SERIE* como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{f_n(k)} = \; & a_{f_1(1)} + a_{f_1(2)} + \ldots + a_{f_1(k)} + \ldots \\
& + a_{f_2(1)} + a_{f_2(2)} + \ldots + a_{f_2(k)} + \ldots \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \\
& + a_{f_n(1)} + a_{f_n(2)} + \ldots + a_{f_n(k)} + \ldots \\
& + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \; .
\end{aligned} \tag{11}$$

Tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 17

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie *absolutamente* convergente . Dada una reordenación cuadrada de N , $\{f_n(k)\}$, entonces :

(i) Para cada n fijo , la serie (de fila) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{f_n(k)} = a_{f_n(1)} + a_{f_n(2)} + \cdots + a_{f_n(k)} + \cdots$$

converge absolutamente .

(ii) Sean

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{f_n(k)} = S_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ converge absolutamente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = S .$$

(iii) La doble serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{f_n(k)}$ converge absolutamente y su suma total es S .

Se puede ilustrar este teorema en la figura 36 :

$$\begin{array}{lcl}
a_{f_1(1)} + a_{f_1(2)} + \cdots + a_{f_1(k)} + \cdots & = & S_1 \\
 & & + \\
+\; a_{f_2(1)} + a_{f_2(2)} + \cdots + a_{f_2(k)} + \cdots & = & S_2 \\
 & & + \\
\cdots\cdots\cdots & & \vdots \\
\textit{la serie de n-ésima fila} & & + \\
+\; \boxed{a_{f_n(1)} + a_{f_n(2)} + \cdots + a_{f_n(k)} + \cdots} & = & S_n \\
 & & + \\
+\; \cdots\cdots\cdots & & \vdots \\
\hline
 & & \| \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots & & \boxed{S}
\end{array}$$

FIG. 36

<u>*Demostración*</u>

i) es evidente .

ii) (Demostración similar a la demostración del teorema 14 .)

Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{N} a_k - S \right| < \epsilon/2 \qquad (12)$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \epsilon/2, \qquad (13)$$

Sea M *un número natural tal que* #*Nota*

$$\{ f_n(k) \;/\; n, k = 1, 2, \ldots, M \} \supset \{ 1, 2, \ldots, N \} .$$

Sea m *cualquier número natural* $\geqslant M$, *como* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f_n(k)} = S_n$ *se tiene*

$$\sum_{n=1}^{m} S_n = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} a_{f_n(k)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_j + \sum_{j>N}' a_j \qquad (14)$$

donde Σ' *es la suma para todo* $j > N$ *tales que (ver Fig. 37)*

$$j \in \{ f_n(k) \;/\; n = 1, 2, \ldots, m \;;\; k = 1, 2, 3, \ldots \} - \{ 1, 2, \ldots, N \}.$$

* * * * * * * * *

$$\begin{array}{lcl|lcl}
a_{f_1(1)} + \cdots + a_{f_1(M)} & + \cdots + & a_{f_1(m)} + \cdots & = & \boxed{S_1} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\
a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_N & & & & \\
a_{f_M(1)} + \cdots + a_{f_M(M)} & + \cdots + & a_{f_M(m)} + \cdots & = & S_M \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\
a_{f_m(1)} + \cdots + a_{f_m(M)} & + \cdots + & a_{f_m(m)} + \cdots & = & S_m
\end{array}$$

Σ' *es la suma de todos los elementos que están en el rectángulo rojo salvo* $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

FIG. 37

#*Nota* *Como* $\{f_n(k)\}$ *es una reordenación cuadrada de* N *entonces los números* $1, 2, \ldots, N$ *deben aparecer en algún lugar de la reordenación cuadrada.*

Entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{m} S_n - S \right| = \left| \sum_{j=1}^{N} a_j + \sum_{j>N}' a_j - S \right| \; .$$

$$\leqslant \left| \sum_{j=1}^{N} a_j - S \right| + \sum_{j>N}' |a_j|$$

$$\leqslant \left| \sum_{j=1}^{N} a_j - S \right| + \sum_{j=N}^{\infty} |a_j| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \; .$$

iii) Sea M *el número determinado en ii), si* $m \geqslant M$ *entonces*

$$\sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{f_n(k)} = \sum_{j=1}^{N} a_j + \sum_{j>N}'' a_j$$

donde Σ'' *es la suma para todo* $j > N$ *tales que*

$$j \in \{ f_n(k) \,/\, n = 1, 2, \ldots, m \,,\, k = 1, 2, \ldots, m \} - \{ 1, 2, \ldots, N \} .$$

Por un procedimiento similar al caso ii), se tiene :

$$\left| \sum_{n,k=1}^{m} a_{f_n(k)} - S \right| < \epsilon . \qquad \blacksquare$$

§ 23 . Reordenación de una doble serie en una serie simple

En el parágrafo anterior hemos estudiado una reordenación de una serie simple dada en la forma de una doble serie , ahora , pensemos en reordenar una doble serie en la forma de una serie simple . Sea g una biyección de $N \times N$ sobre N :

$$g : \quad N \times N \longrightarrow N$$
$$\qquad (n\,,k) \longmapsto g(n,k) \; ,$$

entonces una doble serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ será reordenada en una serie simple como sigue :

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \qquad \text{donde} \qquad b_{g(n,k)} = a_{n,k} \, .$$

EJEMPLO 47

Consideramos una biyección g *dada en la figura 38 , o sea*

$$g(n,k) = \begin{cases} (n-1)^2 + k & \text{si } n \geq k\,, \\ k^2 - (n-1) & \text{si } n < k\,, \end{cases}$$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	4	9	16	25	36	
2	2	3	8	15	24	35	
3	5	6	7	14	23	34	
4	10	11	12	13	22	33	
5	17	18	19	20	21	32	
6	26	27	28	29	30	31	
7	37	38					

FIG. 38

entonces la serie simple obtenida por esta biyección g es:

$$a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{1,2} + a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + a_{2,3} + a_{1,3} + a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + \cdots$$

●

TEOREMA 18

Dada una biyección g de $N \times N$ sobre N. Una doble serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ converge absolutamente si y sólo si su reordenación por g converge absolutamente. En tal caso tenemos:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \qquad \text{donde} \qquad b_{g(n,k)} = a_{n,k}\,. \tag{15}$$

<u>*Demostración*</u>

i) *Si* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *converge absolutamente, entonces por el teorema 17 la doble serie* $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ *converge absolutamente, y tenemos la igualdad (15).*

ii) *Dado* M *existe* N *tal que*

$$\{1, 2, \ldots, M\} \subset \{g(n,k) \,/\, n,k = 1, 2, \ldots, N\}$$

ya que g *es una biyección de* $N \times N$ <u>sobre</u> N. *Entonces*

$$\sum_{j=1}^{M} |b_j| \leq \sum_{n,k=1}^{N} |a_{n,k}|\,,$$

esto es, la convergencia absoluta de la doble serie implica la convergencia

absoluta de su reordenación. ∎

De los teoremas 17 y 18, obtenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 19

Sea $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ una doble serie,

i) Si la doble serie converge absolutamente entonces

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}$ convergen absolutamente y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}\right] = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} \tag{16}$$

donde las series iteradas convergen absolutamente

ii) Si la serie iterada $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|\right]$ ó $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,k}|\right]$ converge, la doble serie converge absolutamente y tenemos la igualdad (16).

EJEMPLO 48

Sea $a_{n,k} = \begin{cases} 1 & si \quad n = k+1 \\ -1 & si \quad n = k-1 \\ 0 & si \quad |n-k| \neq 1 \end{cases}$ *(Ejemplo 46 (iii))*

entonces (ver Fig. 32):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}\right] = -1 + 0 = -1,$$

mientras que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\right] = 1 + 0 = 1,$$

Obsérvese que las dos series iteradas convergen a valores diferentes, pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \qquad \textit{diverge.}$$ ∎

EJEMPLO 49

Demostrar para $q < 1$:

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\dots=\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\dots$$

Solución

Como $|q|<1$ *tenemos:*

$$\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}=\sum_{k=1}^{\infty} q^{(2n-1)k}\ .$$

Además, la siguiente serie iterada converge # Nota

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}|q^{(2n-1)k}|\Big]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|q|^{2n-1}}{1-|q|^{2n-1}}$$

del teorema 19 tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}q^{(2n-1)k}\Big]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}q^{(2n-1)k}\Big]\ .$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}q^{-k}\sum_{n=1}^{\infty}\{q^{2k}\}^n=\sum_{k=1}^{\infty}q^{-k}\frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{1-q^{2k}}\ .\ \bullet$$

Nota

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|q|^{2n-1}}{1-|q|^{2n-1}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|q|^{2n-1}}{1-|q|}=\frac{1}{1-|q|}\sum_{n=1}^{\infty}|q|^{2n-1}<+\infty\ .$$

EJERCICIO 139

Transformar la serie

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}+\dots\qquad(|x|<1)$$

en una doble serie y demostrar que

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\dots\ .=\frac{x}{1-x}-\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^5}{1-x^5}-\dots\ .$$

Solución

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} = x^n \sum_{k=o}^{\infty} (-x^{2n})^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{n(2k-1)}$$

Pero, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} x^{n(2k-1)}|] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{1-|x|^{2n}}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-|x|^2} \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n < +\infty ,$$

entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{n(2k-1)}] = \sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{n(2k-1)}]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{1-x^{2k-1}} . \blacksquare$$

§ 24 Producto de dos series

Dadas dos series

$$\sum_1^{\infty} a_n , \quad \sum_1^{\infty} b_n$$

podemos obtener la siguiente doble serie:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_n b_k . \qquad (17)$$

Si las dos series convergen a A y B respectivamente, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$| \sum_{i=1}^{n} a_i - A | < \epsilon , \quad | \sum_{j=1}^{n} b_j - B | < \epsilon \quad \textit{para todo } n \geqslant N ,$$

luego:

$$| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j - A B | < \epsilon \{ \epsilon + |A| + |B| \} ,$$ #Nota

o sea que

La doble serie en (17) converge a AB.

 # Nota

$$\sum_1^n a_i = A + \Delta \ , \ \sum_{j=1}^n b_j = B + \Delta' \quad donde \quad |\Delta| < \epsilon , \ |\Delta'| < \epsilon ,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j = AB + A\Delta' + B\Delta + \Delta\Delta' .$$

* * * * * * *

Si la convergencia de ambas series $\sum_1^\infty a_n$, $\sum_1^\infty b_n$ es absoluta entonces la doble serie (17) también converge absolutamente ya que

$$\sum_{n=1}^p \sum_{k=1}^q |a_n b_k| = \sum_{n=1}^p |a_n| \sum_{k=1}^q |b_k| \leqslant \sum_1^\infty |a_n| \sum_1^\infty |b_k| ,$$

el teorema 18 nos garantiza que cualquier reordenación de (17) en una serie simple converge a AB , y la convergencia es absoluta .

Sea

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j+1} \tag{18}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty c_n$ es una reordenación *# Nota* de la doble serie (17) en una serie simple , luego tenemos :

$$\sum_{n=1}^\infty c_n = \sum_{n=1}^\infty \Big[\sum_{j=1}^n a_j b_{n-j+1} \Big] = AB \tag{19}$$

La serie $\sum_1^\infty c_n$ se llama el *PRODUCTO de CAUCHY* de las dos series $\sum_1^\infty a_n$ y $\sum_1^\infty b_n$ (ver Fig. 39) .

 # Nota

Más precisamente , $\sum_1^\infty c_n$ *es una reordenación e inserción en paréntisis .* ■

EJEMPLO 50

Sean $\sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = 1 , \ \sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$

entonces

$$c_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} \frac{1}{3^{n-j+1}} = \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{j=1}^n (3/2)^j = \frac{1}{3^n} \{ (3/2)^n - 1 \}$$

$$= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} .$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right] = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_1^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Se observa que

$$\sum_1^{\infty} c_n = \frac{1}{2} = \sum_1^{\infty} a_n \sum_1^{\infty} b_n = 1 \times \frac{1}{2} . \quad \blacksquare$$

* * * * * * * *

$$\begin{array}{lllllll}
 & \boxed{a_1 b_1} & + \; a_1 b_2 & + \; a_1 b_3 & + \; a_1 b_4 & + \; a_1 b_5 & + \cdots \\
c_1 = & + \; a_2 b_1 & + \; a_2 b_2 & + \; a_2 b_3 & + \; a_2 b_4 & + \; a_2 b_5 & + \cdots \\
c_2 = & + \; a_3 b_1 & + \; a_3 b_2 & + \; a_3 b_3 & + \; a_3 b_4 & + \; a_3 b_5 & + \cdots \\
c_3 = & + \; a_4 b_1 & + \; a_4 b_2 & + \; a_4 b_3 & + \; a_4 b_4 & + \cdots & \\
c_4 = & + \; a_5 b_1 & + \; a_5 b_2 & + \; a_5 b_3 & + & & \\
c_5 = & + \cdots & & & & &
\end{array}$$

El producto de Cauchy es una reordenación de la doble serie $\sum a_n b_k$ *en la forma indicada en la figura. La biyección* g *(ver § 20) es:*

$$g(n,k) = \frac{(n+k-2)(n+k-1)}{2} + k .$$

FIG. 39 (Producto de Cauchy)

EJERCICIO 140.

Sea $\sum_1^{\infty} a_n = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n}$, *hallar el producto de Cauchy de* $\sum_1^{\infty} a_n$ *y* $\sum_1^{\infty} a_n$ *y comprobar el resultado (19).*

<u>*Sugerencia*</u> *Similar al Ejemplo 50.* $\blacksquare$

Si las dos series convergen condicionalmente, el producto de Cauchy a veces converge y a veces diverge como se muestra en los siguientes ejemplos

EJEMPLO 51

Sabemos que la serie $\sum^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ *converge condicionalmente, sea* $\sum_{1}^{\infty} c_n$ *el producto de Cauchy de la serie dada con ella misma, o sea*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{(n-k+1)}},$$

pero :

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} (\sqrt{n} - 1) \to 2 \ (n \to \infty).$$

Por lo tanto, el producto de Cauchy $\sum_{1}^{\infty} c_n$ *DIVERGE.* ■

EJEMPLO 52

La serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge condicionalmente a* $\log 2$, *sea* $\sum_{1}^{\infty} c_n$ *el producto de Cauchy de la serie con ella misma, o sea*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k+1)}$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right] \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\, 2}{n+1} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right].$$

Sea

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \log n + C + d_n$$

(C *es constante de Euler,* d_n *como en el teorema 10*)

entonces

$$|d_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad (\textit{Teorema } 10)$$

Por lo tanto tenemos :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 2}{n+1} (\log n + C + d_n)$$

$$= 2\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \log n}{n+1} + 2C \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} d_n}{n+1}$$

las primeras dos series convergen condicionalmente , mientras que la última converge absolutamente , luego el producto de Cauchy converge . ■

EJERCICIO 141

Demostrar que el producto de Cauchy de las dos siguientes series condicionalmente convergentes diverge :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log (n+1)}$$

Sugerencia *Similar al ejemplo 51.*

$$c_n = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \log (n-k+2)}$$

$$|c_n| \geq \frac{1}{\log (n+1)} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} > \frac{1}{\log (n+1)} \int_1^n \frac{dx}{x} = \frac{\log n}{\log (n+1)} \to 1 \; (n\to\infty)$$ ■

EJERCICIO 142

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) dos sucesiones acotadas, demostrar :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1}$ *convergen absolutamente para todo x* $|x| < 1$.

ii) Hallar el producto de Cauchy de las dos series , y demostrar que el producto de Cauchy converge absolutamente si $|x| < 1$.

Sugerencia

i) Aplicar el teorema 7 (iii) .

ii) $$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} x^{k-1} b_{n-k} x^{n-k}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\, b_{n-k} \right) x^{n-1} .$$

Si $|a_n| \leqslant M$, $|b_n| \leqslant M$ *para todo* n , *entonces :*

$$|c_n| \leqslant n\, M^2\, |x|^{n-1} ,$$

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \overline{\lim}\, \sqrt[n]{n\, M^2}\ \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|x|^{n-1}} = |x| < 1 .$$

■

> *TEOREMA 20 (Teorema de Abel)*
>
> Dadas dos series convergentes :
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B ,$$
>
> si el producto de Cauchy converge , entonces su suma total es igual a AB .

O sea , la relación (19) (obtenida en el caso de la convergencia absoluta) es válida siempre y cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converja .

Demostración

Sean :

$$A_n = a_1 + \ldots + a_n , \; B_n = b_1 + \ldots + b_n , \; D_n = c_1 + \ldots + c_n ,$$

entonces

$$A_n \to A , \; B_n \to B , \; D_n \to D \quad (n \to \infty) .$$

Vamos a demostrar que $D = AB$. *De la figura 39 se ve que :*

$$D_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \ldots + a_n B_1 ,$$

luego :

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_n$$

$$= a_1 B_1 + (a_1 B_2 + a_2 B_1) + \ldots + (a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \ldots + a_n B_1)$$

$$= A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \ldots + A_n B_1 ,$$

o sea :

$$\frac{1}{n}(D_1 + D_2 + \ldots + D_n) = \frac{1}{n}(A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \ldots + A_n B_1) \quad (20)$$

Pero como $D_n \to D$ *entonces el primer miembro de la igualdad (20) tiende a* D *cuando* $n \to \infty$ *(Ejercicio 24), mientras que el segundo miembro tiende a* AB *(Ejercicio 24) ya que* $A_n \to A$, $B_n \to B$, *por lo tanto:*

$$D = AB. \quad \blacksquare$$

NOTA

En el capítulo V, daremos otra demostración más sencilla del teorema de Abel utilizando series de potencias.

EJEMPLO 53

En el ejemplo 52 tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}(\log 2)^2. \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 143 ⊕

Demostrar el siguiente <u>teorema de Mertens</u>:

Sean $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

dos series convergentes, si una de las dos series converge absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge a AB.

<u>Demostración</u>

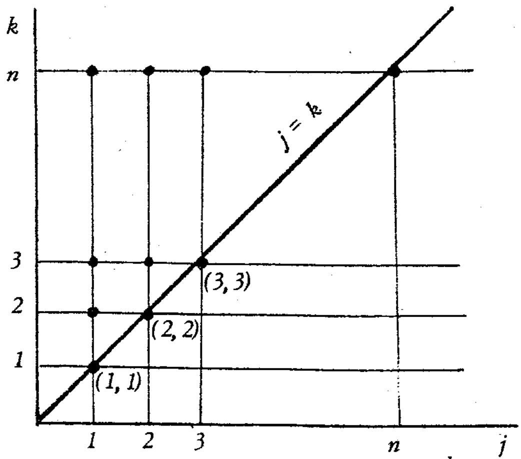
$$D_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_j b_{k-j+1} \quad (\text{ver Fig. } 40)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{h=1}^{n-j+1} b_h = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{j=2}^{n} a_j \sum_{k=n-j+2}^{n} b_k.$$

Como $\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} b_k \to AB$ $(n \to \infty)$, *entonces basta demostrar que*

$$\sum_{j=2}^{n} a_j \sum_{k=n-j+2}^{n} b_k \to 0 \quad (n \to \infty). \quad (21)$$



Los puntos (k,j) *tales que*

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 1 \,,\; j = 1 \\ k = 2 \,,\; j = 1,\, 2, \\ k = 3 \,,\; j = 1,\, 2,\, 3 \\ \cdot \quad\quad \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ k = n \,,\; j = 1, 2, 3, \ldots, n \end{array} \right\}$$

están en la figura.

FIG . 40 $\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \right)$

Suponemos que la serie $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente, sea*

$$\sum_{1}^{\infty} |a_n| = M_1 .$$

Observamos que $\left| \sum_{k=n-j+2}^{n} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-j+1} b_k \right|$ *es acotada ya que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, sea* M_2 *tal que*

$$\left| \sum_{k=n-j+2}^{n} b_k \right| \leqslant M_2 \quad (\text{para todo } n ,\; j \leqslant n).$$

Aplicando la condición de Cauchy a las dos series $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ $\sum_{1}^{\infty} b_k$, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N_o *tal que si* $m \geqslant N_o$ *entonces:*

$$\sum_{j=m}^{\infty} |a_j| < \frac{\epsilon}{2M_2} \quad , \quad \left| \sum_{k=m}^{m+p} b_k \right| < \frac{\epsilon}{2M_1} \quad (\text{para todo } p > 0).$$

Si $n \geqslant 2N_o$ *, la suma en (21) con respecto al índice* j *se divide en dos :*

$$\sum_{j=2}^{n} = \sum_{j=2}^{N_o} + \sum_{j=N_o+1}^{n} ,$$

así,

$$\left| \sum_{j=2}^{n} a_j \sum_{k=n-j+2}^{n} b_k \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=2}^{N_o} |a_j| \; \underbrace{\Big| \sum_{k=n-j+2}^{n} b_k \Big|}_{\substack{\wedge \\ \epsilon/2M_1}} + \sum_{j=N_o+1}^{n} |a_j| \; \underbrace{\Big| \sum_{k=n-j+2}^{n} b_k \Big|}_{\substack{\wedge \\ M_2}}$$

$$(n-j+2 \geqslant n-N_o+2 > N_o)$$

$$< \frac{\epsilon}{2M_1} \underbrace{\sum_{j=2}^{N_o} |a_j|}_{\substack{\wedge \\ M_1}} + M_2 \underbrace{\sum_{j=N_o+1}^{n} |a_j|}_{\substack{\wedge \\ \epsilon/2M_2}}$$

$$< \frac{\epsilon}{2M_1} M_1 + M_2 \frac{\epsilon}{2M_2} = \epsilon . \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 54

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, *entonces el producto de Cauchy converge ya que la segunda serie converge absolutamente. En realidad :*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k+1)^2}$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k+1)^2}$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(n+1)^2} \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right\} + \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n-k+1)^2} \right]$$

$$= (-1)^{n-1} \left[\frac{2}{(n+1)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right\} + \frac{1}{(n+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right\} \right].$$

Como

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = C_1 + \log n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = C_2 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(C_1 , C_2 son constantes)

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *converge condicionalmente.* $\blacksquare$

Producto de Dirichlet

El enésimo término de la serie *producto de Cauchy de* $\Sigma_1^\infty a_i$ y $\Sigma_1^\infty b_j$ es la suma de todos los productos $a_i\, b_j$ tales que $i + j = n + 1$, o sea que el producto de Cauchy es una reordenación de la doble serie

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i\, b_j$$

de acuerdo con la *suma de los índices* de a_i y b_j. De manera similar, se puede pensar en otra reordenación de la doble serie $\Sigma_{i,j=1}^\infty a_i\, b_j$ de acuerdo con el *producto de los índices* de a_i y b_j, o sea, una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ donde d_n es la suma de todos los productos $a_i\, b_j$ tales que $i \cdot j = n$. Así:

$$d_1 = a_1\, b_1\ , \quad d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1\ , \quad d_3 = a_1 b_3 + a_3 b_1\ ,$$

$$d_4 = a_1\, b_4 + a_2\, b_2 + a_4\, b_1\ , \qquad d_5 = a_1\, b_5 + a_5\, b_1\ ,$$

$$d_6 = a_1\, b_6 + a_2\, b_3 + a_3\, b_2 + a_6\, b_1\ , \quad etc.$$

En general,

$$d_n = \sum_{j\,|\,n} a_j\, b_{n/j} \qquad (\, n = 1,2,3, \dots \,) \tag{22}$$

donde $\sum\limits_{j\,|\,n}$ es la suma para todo j que divide a n. Esta serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ se llama el *PRODUCTO de DIRICHLET* de $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ y $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$

EJEMPLO 55

Sean $A(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$, $B(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{n^s}$ *(s es una constante)*

dos series convergentes absolutamente, demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = A(s)\ B(s)$$

donde

$$c_n = \sum_{j\,|\,n} a_j\, b_{n/j}\ .$$

Solución

Como las dos series convergen absolutamente, entonces el producto de Dirichlet converge a $A(s)\,B(s)$. El enésimo término del producto de Dirichlet es:

$$\sum_{j|n} \frac{a_j}{j^s}\,\frac{b_{n/j}}{(n/j)^s} = \sum_{j|n} a_j\, b_{n/j}\,\frac{1}{n^s} = \frac{c_n}{n^s}$$

EJERCICIO 144

Sea $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 1)$, *demostrar que*

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

donde $d(n)$ *es el número de divisores de* n.

Sugerencia

Aplicar el ejemplo anterior para $a_n = b_n = 1$. ■

EJERCICIOS ADICIONALES (Doble serie)

EJERCICIO 145

Investigar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^a} \quad (a > 1).$$

olución

$$\int_1^M \frac{dx}{(n+x)^a} \leqslant \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{(n+k)^a} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} + \int_1^M \frac{dx}{(n+x)^a}$$

entonces

$$\frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{(n+1)^{a-1}} - \frac{1}{(n+M)^{a-1}}\right] \leqslant \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{(n+k)^a}$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^a} + \frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{(n+1)^{a-1}} - \frac{1}{(n+M)^{a-1}}\right].$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{1}{a-1}\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{(n+1)^{a-1}}-\frac{1}{(n+M)^{a-1}}\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+k)^{a}}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^{a}}+\frac{1}{a-1}\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{(n+1)^{a-1}}-\frac{1}{(n+M)^{a-1}}\right\}.$$

Entonces la doble serie converge si $a-1>1$ (ó $a>2$).

Si $a \leqslant 2$ tenemos:

$$\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{(n+1)^{a-1}}-\frac{1}{(n+M)^{a-1}}\right\} \geqslant \int_1^N \frac{dy}{(y+1)^{a-1}}$$

$$-\left\{\frac{1}{(n+1)^{a-1}}+\int_1^N\frac{dy}{(y+M)^{a-1}}\right\}$$

$$=\begin{cases} \log\dfrac{(N+1)(M+1)}{N+M}-\log 2-\dfrac{1}{M} & (\text{si } a=2) \\[2ex] \dfrac{1}{2-a}\left[(N+1)^{2-a}+(M+1)^{2-a}-(M+N)^{2-a}\right]-\dfrac{2^{2-a}}{2-a}-\dfrac{1}{(M+1)^{a-1}} & \\ & (\text{si } 1<a<2), \end{cases}$$

entonces la doble serie diverge.

Nótese que la doble serie diverge evidentemente si $a \leqslant 1$. ■

EJERCICIO 146

Demostrar que la doble serie

$$\sum_{n,k=1}^{\infty}(n+ik)^{-a} \qquad (i=\sqrt{-1})$$

converge absolutamente si y sólo si $a>2$.

<u>Solución</u>

$$|n+ik| = \sqrt{n^2+k^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(n+k) \leqslant |n+ik| \leqslant n+k,$$

del ejercicio 145 se tiene que la doble serie converge absolutamente si y sólo si $a>2$. ■

EJERCICIO 147

Sea $\{a(n)\}$ una sucesión, supongamos que la doble serie

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a(n)\, x^{nk}$$

converge absolutamente a $S(x)$ para $|x| < 1$. Demostrar que las dos siguientes series convergen absolutamente para $|x| < 1$ y que $S(x)$ es la suma total de ellas:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{x^n}{1 - x^n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A(n)\, x^n$ donde $A(n) = \displaystyle\sum_{d|n} a(d)$

<u>Solución</u>

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a(n)\, x^{nk} = a(n) \sum_{k=1}^{\infty} (x^n)^k = a(n) \frac{x^n}{1 - x^n}$.

Como la convergencia de la doble serie es absoluta, se tiene:

$$S(x) = \sum_{n,k=1}^{\infty} a(n)\, x^{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{k=1}^{\infty} a(n)\, x^{nk} \Big] = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

ii) $\displaystyle S(x) = \sum_{n,k=1}^{\infty} a(n)\, x^{nk} = \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\sum_{d|m} a(d)\, x^m \Big] = \sum_{m=1}^{\infty} A(m)\, x^m$.

NOTA: $\displaystyle\sum_{d|m}$ es la suma para todo d que divide a m. ■

EJERCICIO 148

Demostrar:

$$\frac{x}{1 - x} - \frac{x^2}{1 - x^2} - \frac{x^3}{1 - x^3} + \frac{x^4}{1 - x^4} - \frac{x^5}{1 - x^5} + \frac{x^6}{1 - x^6} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$$

donde el coeficiente de $x^n/(1 - x^n)$ es ± 1 de acuerdo con la siguiente regla:

sea $n = m^2\, p_1 p_2 \cdots p_s$ ($p_1, p_2, \ldots, p_s$ son primos diferentes)

entonces el coeficiente de $x^n/(1 - x^n) = a(n) = (-1)^s$.

<u>Solución</u>

[I] Sea p un primo, entonces $a(p^s) = (-1)^s$, luego:

$$A(p^s) = \sum_{d|p^s} a(d) = a(1) + a(p) + a(p^2) + \dots + a(p^s)$$

$$= 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^s = \begin{cases} 0 & \text{si } s \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } s \text{ es par.} \end{cases}$$

[II] *Sea* q *un primo tal que* $(q, n) = 1$.

$$A(nq^t) = \sum_{d|nq^t} a(d) = \sum_{d|n} a(d) + \sum_{d|n} a(dq) + \sum_{d|n} a(dq^2) + \dots$$

$$\dots + \sum_{d|n} a(dq^t)$$

$$= \sum_{d|n} a(d) \{1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^t\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ es impar} \\ A(n) & \text{si } t \text{ es par.} \end{cases}$$

[III] *De* [I] *y* [II] *se tiene que*

$$A(n) = \sum_{d|n} a(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k^2 \text{ (para todo } k \text{ natural)} \\ 1 & \text{si } n = k^2 \text{ (para algún } k \text{ natural).} \end{cases}$$

Aplicando el ejercicio 147 se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2}. \qquad \blacksquare$$

EJERCICIO 149

Demostrar para $|q| < 1$:

$$1 + \frac{8q}{1-q} + \frac{16q^2}{1+q^2} + \frac{24q^3}{1-q^3} + \dots$$

$$= 1 + \frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^3)^2} + \dots$$

Solución

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8nq^n}{1 + (-q)^n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} 8nq^n [-(-q)^n]^{k-1}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)(k-1)} \, 8 \, n \, q^{nk}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 8 \, (-1)^{-k+1} \, n \, [(-1)^{k-1} \, q^k \,]^n$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{-k+1} \, 8 \, \frac{(-1)^{k-1} \, q^k}{\{ 1 - (-1)^{k-1} \, q^k \, \}^2} \qquad (\text{ Ejercicio } 54 \,)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8 \, q^k}{\{ 1 + (-q)^k \, \}^2} \, . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 150

Demostrar que para $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^6} + \frac{x^5}{1+x^{10}} + \ldots = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^6} + \frac{x^5}{1-x^{10}} - \ldots .$$

<u>*Sugerencia*</u>

Similar al ejercicio 149. ●

EJERCICIO 151

Demostrar que para $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^6} - \ldots = \frac{x}{1+x} - \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{x^5}{1+x^5} - \ldots$$

<u>*Sugerencia*</u>

Similar al ejercicio 149 . ●

EJERCICIO 152

Demostrar que para $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x} - \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} - \ldots = \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^3}{(1+x^3)^2} - \ldots$$

<u>*Sugerencia*</u>

Similar al ejercicio 149 . ●

EJERCICIO 153

Demostrar que para $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1-x^2} \quad \frac{3x^2}{1-x^6} + \frac{5x^5}{1-x^{10}} + \dots$$

$$= \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3(1+x^6)}{(1-x^6)^2} + \frac{x^5(1+x^{10})}{(1-x^{10})^2} + \dots$$

<u>*Sugerencia*</u>

Similar al ejercicio 149

EJERCICIO 154

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ *converge, demostrar que*

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{a_n\, a_k}{n+k} \quad \text{converge.}$$

<u>*Solución*</u>

$$\sum_{n,k=1}^{N} \frac{a_n\, a_k}{n+k} = \sum_{n=1}^{N} |a_n| \sum_{k=1}^{N} \frac{|a_k|}{n+k}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n| \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(n+k)^2}}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n| \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2} \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{dx}{(n+x)^2}}$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n}$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (a_n)^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

Entonces la doble serie converge absolutamente. ■

EJERCICIO 155

Sea $$a_{n,k} = \frac{(-1)^{n+k}}{n\,k}$$

i) hallar $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \right]$ ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \right]$ iii) $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$.

iv) *Demostrar que la doble serie no converge absolutamente.*

v) *Investigar la convergencia o divergencia del producto de Cauchy de* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *consigo misma.*

<u>Solución</u>

i) ii) $(\log 2)^2$

iii) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{M} \frac{(-1)^k}{k} \to (\log 2)^2 \quad (N, M \to \infty)$

iv) $\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} |a_{n,k}| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k} \to +\infty \quad (N, M \to \infty)$.

v) Converge (Ejemplo 52). ■

EJERCICIO 156

Demostrar :

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ (-1)^{\frac{1}{2}} \dfrac{n!}{(\frac{n}{2}!)^2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

<u>Solución</u>

$$(1 + x)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$(1 - x)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k$$

entonces

$$(1 - x^2)^n = (1 + x)^n \times (1 - x)^n = \sum_{k=o}^{2n} c_k x^k$$

donde

$$c_k = \sum_{j=o}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k}{k-j} = \sum_{j=o}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}^2$$

Por otra parte :

$$(1 - x^2)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \; x^{2k}$$

entonces

$$c_n = \sum_{j=o}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}^2 = \begin{cases} 0 & si \;\; n \;\; es \;\; impar \\ (-1)^{\frac{1}{2}} \binom{n}{n/2} & si \;\; n \;\; es \; par . \end{cases}$$

■

EJERCICIO 157

Demostrar que el producto de las dos series :

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \ldots\ldots\ldots \quad , \quad y$$

$$1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \ldots\ldots$$

es igual a

$$1 - \frac{x^2}{1^2\, 2!} + \frac{x^4}{(2!)^2\, 4!} \quad \frac{x^6}{(3!)^2\, 6!} + \ldots\ldots$$

Solución

Las dos series convergen absolutamente, entonces el producto es igual al producto de Cauchy, o sea

$$\sum_{n=o}^{\infty} c_n \; x^n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{(k!)^2} \frac{(-1)^{n-k}}{\{(n-k)!\}^2} = (-1)^n \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{(k!)^2} \frac{(-1)^k}{\{(n-k)!\}^2}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 \qquad (Ejercicio \;\; 156\,)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2} (-1)^{\frac{1}{2}} \dfrac{n!}{\{\left(\frac{n}{2}\right)!\}^2} = (-1)^{n/2} \dfrac{1}{\{\left(\frac{n}{2}\right)!\}^2 . \, n!} & (\; si \;\; n \;\; es \; par) \\ 0 & (\; si \;\; n \;\; es \; impar). \end{cases}$$

■

EJERCICIO 158 ⊕

Demostrar que el producto de Cauchy de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^r}$ *consigo misma converge si* $r > \frac{1}{2}$ *, diverge si* $r \leqslant \frac{1}{2}$. *(Cauchy - Cajori)*

Solución

[I] *Supongamos que* $r \leqslant 1$ (*si* $r > 1$ *la serie converge absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge.*)

Sea

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^r} (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k+1)^r}$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r (n-k+1)^r}.$$

Pero , $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r(n-k+1)^r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{2r}\left[\frac{k}{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]^r}$$

$$= \frac{1}{n^{2r-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\left[\frac{k}{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]^r} ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\left[\frac{k}{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]^r} \to \int_0^1 \frac{dx}{\{x(1-x)\}^r} = a \ (\text{una constante}),$$

por lo tanto tenemos:

$$|c_n| \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad \text{si} \quad r > \frac{1}{2} ,$$

$$\{c_n\} \ \text{no tiende a cero si} \quad r \leqslant \frac{1}{2} ,$$

esto es, el producto de Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *diverge si* $r \leqslant \frac{1}{2}$.

[II] *Ahora, supongamos que* $r > \frac{1}{2}$.

$$|c_{n-1}| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^r (n-k)^r} , \quad |c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r(n-k+1)^r} ,$$

entonces

$$|c_{n-1}| - |c_n| = \begin{cases} 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{1}{k^r(n-k)^r} - \frac{1}{k^r(n+1-k)^r}\right] - \left[\frac{2}{n+1}\right]^{2r} & \begin{pmatrix}\text{si } n \text{ es} \\ \text{impar}\end{pmatrix} \\ 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} \left[\frac{1}{k^r(n-k)^r} - \frac{1}{k^r(n+1-k)^r}\right] - \left[\frac{2}{n}\right]^{2r} & \left(\text{si } n \text{ es par.}\right) \end{cases}$$

Pero ,

$$\frac{1}{k^r (n-k)^r} = \frac{1}{k^r (n+1-k)^r} \left[1 - \frac{1}{n+1-k} \right]^{-r}$$

$$\geqslant \frac{1}{k^r (n+1-k)^r} \left[1 + \frac{r}{n+1-k} \right] = \frac{1}{k^r (n+1-k)^r} + \frac{r}{k^r (n+1-k)^{r+1}} .$$

$$2 \sum_{k=1}^{\leqslant n/2} \frac{r}{k^r (n+1-k)^{r+1}} = \frac{2r}{n^{2r}} \, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\leqslant n/2} \frac{1}{(\frac{k}{n})^r \, (1 - \frac{1}{n} - \frac{k}{n})^{r+1}}$$

$$\xrightarrow[(n \to \infty)]{} \frac{2r}{n^{2r}} \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^r (1-x)^{r+1}} .$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^r (1-x)^{r+1}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{(x-x^2)^r (1-x)} \qquad \left(x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \right)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \frac{(1/2) \cos \theta \, d\theta}{(\frac{1}{2} \cos \theta)^{2r} \, \frac{1}{2} (1 - \operatorname{sen} \theta)}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \frac{(2)^{2r} \cos \theta}{\cos^{2r} \theta \, (1 - \operatorname{sen} \theta)} \, d\theta$$

$$\geqslant \int_{-\pi/2}^{0} \frac{(2)^{2r}}{1 - \operatorname{sen} \theta} \, d\theta \qquad (\text{puesto que } \; 2r > 1 \;)$$

$$= (2)^{2r} \int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{1 - \operatorname{sen} \theta} \, d\theta = (2)^{2r} ,$$

entonces :

$$\lim_{n \to \infty} 2 \sum_{k=1}^{\leqslant n/2} \frac{r}{k^r (n+1-k)^{r+1}} \Big/ \left(\frac{2}{n}\right)^{2r} \geqslant \frac{2r}{n^{2r}} (2)^{2r} \Big/ \left(\frac{2}{n}\right)^{2r} = 2r > 1 .$$

Esto es, para n suficientemente grande se tiene :

$$|c_{n-1}| - |c_n| > 0 ,$$

o sea, $\{|c_n|\}$ *es decreciente , luego el producto de Cauchy converge condicionalmente . .*

■